STATISTISCHE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE BEWEGUNG DER KLEINEN PLANETEN

VON

S. OPPENHEIM

WIEN

MIT 3 TEXTFIGUREN

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 20. MÄRZ 1919

Zur Erklärung der eigentümlichen Gesetzmäßigkeiten in den Eigenbewegungen der Fixsterne, die die neueste Zeit namentlich seit den fundamentalen Untersuchungen Kobold's in Kiel und Kapteyn's in Gröningen erkennen ließ, sind zunächst drei verschiedene Hypothesen aufgestellt worden. Die erste löst das ganze Heer der Fixsterne in zwei oder vielleicht mehrere Teilschwärme auf, die einzeln und vollständig unabhängig voneinander ihre parallelen Bahnen am Himmel beschreiben. Die zweite setzt an Stelle der kugelförmigen Verteilung der Geschwindigkeitsvektoren deren ellipsoidische voraus und nimmt dann an, daß die Hauptachsen dieses Ellipsoides die ausgezeichneten Richtungen vorstellen, die die Sterne in ihren Bewegungen bevorzugen. Gegen die erste Hypothese erhob man den Einwand, daß sie die Vorstellung von der Einheitlichkeit des ganzen Fixsternsystems, die durch die Erscheinung der Milchstraße so wohlbegründet sei, preisgebe. Die zweite wiederum läßt keine einfache physikalische Deutung zu, wenn man nicht dem Raume an sich ein krystallinisches Gefüge zuschreiben will, das die Ursache der Verschiedenheit der Geschwindigkeitsvektoren nach verschiedenen Richtungen sein soll.

Die dritte Hypothese endlich knüpft an eine Analogie an, die zwischen den Bewegungen der Fixsterne und der kleinen Planeten, wie sie von der Erde aus beobachtet werden, besteht. Sie will nachweisen, daß die in den Spezialbewegungen der Fixsterne konstatierten Gesetzmäßigkeiten den gleichen systematischen Charakter zeigen wie jene, die sich im geozentrischen Laufe des Schwarmes kleiner Planeten vorfinden, die, wie bekannt, zwischen Jupiter und Mars ihre elliptischen Bahnen um die Sonne beschreiben. Ebensowenig wie dieses System in einzelne Teilgruppen zerfällt, wie es in ihm Heerstraßen gibt, auf denen diese Teilschwärme einherziehen, ebensowenig gibt es auch im System der Fixsterne einzelne Sternzüge und von ihnen bevorzugte Bahnen. Vielmehr treten diese nur scheinbar auf und sind dadurch bedingt, daß wir die Bewegung der Fixsterne nicht von ihrem Zentrum aus, um das sie stattfinden, sondern von einem exzentrisch liegenden Standpunkte aus beobachten.

Zur mathematischen Durchführung dieser neuen Hypothese war es erforderlich, die Bewegungen in dem Schwarme der kleinen Planeten nach gleichen statistischen Grundsätzen zu bearbeiten, die man bisher für die der Fixsterne anwandte. Die Untersuchung lieferte auch eine Reihe merkwürdiger Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen zwischen den statistisch gefundenen Mittelwerten der geozentrischen Koordinaten der Planeten und ihren Geschwindigkeiten. Viele von ihnen wurden schon früher im direkten Anschluß an meine Untersuchungen über die Eigenbewegungen der Fixsterne veröffentlicht. Doch schien es mir wertvoll, sie nochmals und in ununterbrochener Darstellung zu entwickeln und die damit sich ergebende Gelegenheit auch dazu zu benützen, sie weiter auszuführen. Es entstand so eine Art »statistischer Mechanik der Bewegungen im System der kleinen Planeten«, die über die Analogie mit den Bewegungen der Fixsterne hinaus und ohne Nutzanwendung auf diese Anspruch auf ein allgemeines und bleibendes Interesse besitzt.

Dies der Zweck der vorliegenden Mitteilung. Ihre Verwertung für die Theorie der Eigenbewegung der Fixsterne wird nicht ausbleiben.

1. Grundlagen der Rechnung.

Das Berliner astronomische Jahrbuch über das Jahr 1890 veröffentlicht als letztes noch die Jahresephemeriden über den geozentrischen Lauf der kleinen Planeten. Diesem Jahrbuch entnahm ich für die nachstehenden zwei Epochen:

1. 1888 Jänner 17 aus dem 20tägigen Intervall Jänner 7—27
2. 1888 Mai 16 » » » » Mai 6—26

für jeden einzelnen der 265 Planeten die Größen:

$\Delta\alpha$ das ist die Differenz der Rektaszension
$\Delta\delta$ » » » » » Deklination
$\Delta \log \rho$ » » » » des Logarithmus der geozentrischen Distanz ρ

ferner δ und $\log \rho$ selbst, das ist Deklination und den Logarithmus der Distanz ρ, teilte die erhaltenen Werte in 12 Gruppen, die je zwei Rektaszensionsstunden umfassen und zog aus ihnen die Mittelwerte. Es ergaben sich so die folgenden Zahlenwerte:

AR.	Zahl der Planeten	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta \log \rho$	δ	$\log \rho$
			I. 1888 Jänner 7.—27.			
0^h	31	+ 28ˢ245	+ 169″42	+ 0·03826	+ 0°23′4	0·43358
2	17	+ 17·406	+ 127·82	+ 0·04964	+ 7 6·1	0·37412
4	14	+ 0·250	— 1·93	+ 0·04664	+ 19 42·0	0·34557
6	9	— 12·411	— 2·67	+ 0·03456	+ 24 25·2	0·23633
8	11	— 19·664	+ 51·00	— 0·00245	+ 21 25·8	0·25864
10	19	— 11·195	+ 45·42	— 0·02947	+ 7 52·5	0·32747
12	32	+ 4·794	— 20·41	— 0·04656	— 0 36·9	0·35259
14	35	+ 16·891	— 65·26	— 0·04269	— 8 52·7	0·44011
16	24	+ 27·387	— 68·62	— 0·03058	— 17 3·0	0·51462
18	24	+ 36·550	+ 10·87	— 0·01479	— 22 25·3	0·54933
20	30	+ 36·183	+ 94·28	— 0·00097	— 20 10·0	0·56723
22	19	+ 30·300	+ 165·37	+ 0·01795	— 11 2·5	0·55121

AR.	Zahl der Planeten	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta \log \rho$	δ	$\log \rho$
			II. 1888 Mai 6.—26.			
0h	25	+ 27ˢ808	+ 183″16	— 0·02864	+ 0°42′6	0·46260
2	17	+ 31·365	+ 169·94	— 0·01235	+ 12 19·0	0·56388
4	32	+ 37·272	+ 104·91	+ 0·00562	+ 18 56·3	0·55014
6	23	+ 34·439	+ 11·39	+ 0·01874	+ 22 50·0	0·55674
8	20	+ 27·275	— 88·10	+ 0·03515	+ 21 47·8	0·48510
10	27	+ 13·267	— 67·08	+ 0·04256	+ 11 30·7	0·43093
12	34	— 0·024	— 12·47	+ 0·04356	— 2 51·1	0·33609
14	23	— 12·991	+ 48·39	+ 0·02283	9 22·4	0·29674
16	16	— 17·706	+ 48·37	— 0·00625	— 14 51·9	0·27012
18	9	— 12·200	— 10·56	— 0·02833	— 21 20·0	0·31478
20	12	+ 5·017	+ 26·58	— 0·04583	19 24·5	0·35358
22	27	+ 18·456	+ 107.41	— 0·04278	— 11 16·8	0·41563

2. Bestimmungen der mittleren Bahnebene.

Es seien x, y und z die heliozentrischen Koordinaten eines Planeten, ξ, η und ζ seine geozentrischen und X, Y, Z die heliozentrischen Koordinaten der Erde, bezogen auf eine beliebige Fundamentalebene, dann gelten die Gleichungen

$$\xi = x - X \qquad \eta = y - Y \qquad \zeta = z - Z.$$

Sind ferner Ω und i, Knoten und Neigung der Ekliptik, als der Bahnebene der Erde gegen die angenommene Fundamentalebene und

$$l = \sin i \sin \Omega \qquad m = -\sin i \cos \Omega \qquad n = \cos i$$

ihre Richtungscosinus, so gilt die Beziehung

$$l X + m Y + n Z = 0,$$

die aussagt, daß die Koordinaten X, Y und Z die Gleichung einer Ebene erfüllen. Aus ihr folgt durch Differenzbildung nach der Zeit

$$l \Delta X + m \Delta Y + n \Delta Z = 0.$$

In gleicher Art erfüllen natürlich auch die Koordinaten x, y und z die Gleichung einer Ebene. Aber im allgemeinen werden die Richtungscosinus derselben für die einzelnen Planeten verschiedene Werte haben, die für Ω alle Werte zwischen 0°—360° durchlaufen, für i zwischen 0° und etwa 35° eingeschlossen sind. Nimmt man aber in geeigneter Weise Mittelwerte der x, y und z, so kann man annehmen, daß sich in ihnen der Einfluß der Spezialwerte der Ω und i aufhebt und nur die besonderen der Erdbahn entsprechenden Werte übrigbleiben. Es sagt dann diese Behauptung nichts anderes aus, als daß der Schwarm der kleinen Planeten sich im Mittel in einer Ebene bewegt, die mit der Ekliptik zusammenfällt oder daß die einzelnen Bahnebenen der Planeten sich symmetrisch um die Ekliptik gruppieren. Macht man diese Annahme, dann genügen die Größen x, y und z, unter ihnen nunmehr nicht die heliozentrischen Koordinaten eines Planeten als viel mehr Mittelwerte einer bestimmten Anzahl von ihnen verstanden, den Gleichungen

$$l x + m y + n z = 0$$
$$l \Delta x + m \Delta y + n \Delta z = 0$$

und ist dies der Fall, so hat man sofort auch die analogen Relationen für die geozentrischen Koordinaten und ihre Differenzen

$$l\xi + m\eta_1 + n\zeta = 0$$
$$l\Delta\xi + m\Delta\eta_1 + n\Delta\zeta = 0,$$

aus denen in Verbindung mit

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

die Unbekannten l, m und n berechnet werden können.

Man erhält, wenn man die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi & \eta_1 & \zeta \\ \Delta\xi & \Delta\eta_1 & \Delta\zeta \end{vmatrix} = D$$

setzt

$$l = (\eta_1\Delta\zeta - \zeta\Delta\eta_1) : D \qquad m = (\zeta\Delta\xi - \xi\Delta\zeta) : D \qquad n = (\xi\Delta\eta_1 - \eta_1\Delta\xi) : D,$$

worin, mit Rücksicht auf die Relation $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, für D zu setzen ist

$$D = [(\xi^2 + \eta_1^2 + \zeta^2)(\Delta\xi^2 + \Delta\eta_1^2 + \Delta\zeta^2) - (\xi\Delta\xi + \eta_1\Delta\eta + \zeta\Delta\zeta)]^{1/2}.$$

Zur tatsächlichen Berechnung der l, m und n aus den oben angesetzten Daten führt ein doppelter Weg. Man berechne sich die rechtwinkeligen Koordinaten ξ, η und ζ, und ebenso die Geschwindigkeitskomponenten $\Delta\xi$, $\Delta\eta_1$ und $\Delta\zeta$ nach den Formeln

$$\xi = \rho\cos\alpha\cos\delta \qquad \eta_1 = \rho\sin\alpha\cos\delta \qquad \zeta = \rho\sin\delta$$
$$\Delta\xi = \Delta\rho\cos\alpha\cos\delta - \rho\Delta\alpha\cos\delta\sin\alpha - \rho\Delta\delta\sin\delta\cos\alpha$$
$$\Delta\eta_1 = \Delta\rho\sin\alpha\cos\delta + \rho\Delta\alpha\cos\delta\cos\alpha - \rho\Delta\delta\sin\delta\sin\alpha$$
$$\Delta\zeta = \Delta\rho\sin\delta + \rho\Delta\delta\cos\delta$$

oder in kürzerer Schreibweise

$$\Delta\xi = \rho\Delta\alpha\cos\delta\,\gamma_{11} + \rho\Delta\delta\,\gamma_{12} + \Delta\rho\,\gamma_{13} \qquad \xi = \rho\gamma_{13}$$
$$\Delta\eta_1 = \rho\Delta\alpha\cos\delta\,\gamma_{21} + \rho\Delta\delta\,\gamma_{22} + \Delta\rho\,\gamma_{23} \qquad \eta_1 = \rho\gamma_{23}$$
$$\Delta\zeta = \rho\Delta\delta\,\gamma_{32} + \Delta\rho\,\gamma_{33} \qquad \zeta = \rho\gamma_{33},$$

wobei, wenn

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta_1^2 + \zeta^2$$
$$\Delta\xi^2 + \Delta\eta_1^2 + \Delta\zeta^2 = g^2 = \rho^2\Delta\alpha^2\cos^2\delta + \rho^2\Delta\delta^2 + \Delta\rho^2$$

gesetzt wird, für

$$D = \sqrt{\rho^2 g^2 - \rho^2\Delta\rho^2} = \rho\sqrt{\cos^2\delta\,\Delta\alpha^2 + \Delta\delta^2}$$

folgt. Oder aber man führe von vorneherein Polarkoordinaten ein und erhält ohne Berechnung von D

$$\frac{l}{n} = \operatorname{tg} i \sin\Omega = \frac{\eta_1\Delta\zeta - \zeta\Delta\eta_1}{\xi\Delta\eta_1 - \eta\Delta\xi} = \frac{\sin\alpha\Delta\delta - \cos\alpha\sin\delta\cos\delta\Delta\alpha}{\cos\delta\Delta\alpha}$$

$$\frac{m}{n} = \operatorname{tg} i\cos\Omega = \frac{\zeta\Delta\xi - \xi\Delta\zeta}{\zeta\Delta\eta_1 - \eta_1\Delta\xi} = \frac{\cos\alpha\Delta\delta + \sin\alpha\sin\delta\cos\delta\Delta\alpha}{\cos\delta\Delta\alpha},$$

woraus, wenn man in passender Weise mit sin α und cos α multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert und subtrahiert, die einfachen Formeln

$$\operatorname{tg} i \sin(\alpha - \Omega) = \operatorname{tg} \delta$$

$$\operatorname{tg} i \cos(\alpha - \Omega) = \Delta\delta / \cos^2 \delta \, \Delta\alpha$$

folgen, wobei die Vorzeichen für sin und cos so zu wählen sind, daß i stets im ersten Quadranten liegt.

Die Rechnung selbst ergab folgende Einzelresultate:

AR.	log ξ	log η	log ζ	$\Delta\xi$	$\Delta\eta$	$\Delta\zeta$	D
			I. 1888 Jänner 7.—27.				
0^h	0·4336	—	—	+ 821'9	+ 1149'7	+ 459'8	+ 1238'3
2	0·3029	0·0643	9·6730	+ 434·2	+ 949·8	+ 481·4	+ 677·9
4	0·0171	0·2556	9·8830	+ 378·1	+ 670·3	+ 278·0	+ 8·9
6	—	0·1989	9·8362	+ 294·2	+ 434·2	+ 183·4	— 294·3
8	9_n9302	0·1687	9·7960	+ 467·4	+ 194·9	+ 74·7	— 510·7
10	0_n2562	0·0177	9·6263	+ 612·4	+ 50·3	— 4·1	— 362·9
12	0_n3526	—	—	+ 830·0	— 161·9	— 46·0	+ 168·4
14	0_n3688	0_n1303	9_n7389	+ 1163·0	— 118·4	+ 9·1	+ 707·3
16	0_n1861	0_n4247	0_n0520	+ 1502·1	+ 79·9	+ 62·2	+ 1281·1
18	—	0_n5119	0_n1492	+ 1781·6	+ 365·1	+ 201·4	+ 1782·3
20	0·2387	0_n4773	0_n1046	+ 1675·2	+ 859·6	+ 336·4	+ 1912·8
22	0·4800	0_n2414	9_n8500	+ 1322·8	+ 1065·9	+ 476·0	+ 1690·5
			II. 1888 Mai 6.—26.				
0^h	9·4626	—	—	— 657'8	+ 1210'2	+ 531'4	+ 1321'7
2	0·4926	0·2541	9·8627	— 1255·8	+ 1225·3	+ 538·8	+ 1800·1
4	0·2207	0·4602	0·0876	— 1603·3	+ 948·6	+ 404·0	+ 1899·7
6	—	0·5193	0·1566	— 1707·8	+ 474·4	+ 250·4	+ 1708·3
8	0_n1566	0·3952	0·0225	— 1461·7	+ 184·7	+ 40·3	+ 1204·0
10	0^n3597	0·1211	9·7298	— 1071·4	— 2·6	+ 3·5	+ 567·5
12	0_n3361	—	—	— 747·6	+ 0·8	— 27·0	— 270·5
14	0_n2255	9_n9869	9_n5956	— 509·3	+ 142·6	+ 22·7	— 390·1
16	9_n9416	0_n1802	9_n8075	— 374·4	+ 280·2	+ 116·3	— 473·0
18	—	0_n2773	9_n9146	— 346·6	+ 433·4	+ 164·2	— 347·3
20	0·0251	0_n2637	9_n8910	— 235·9	+ 728·5	+ 338·5	+ 170·4
22	0·3444	0_n1058	9_n7148	— 346·9	+ 1016·1	+ 449·5	+ 759·8

Die hier auftretende Größe D, die Determinante der ξ und $\Delta\xi$, ist, wenn man statt des Äquators als Fundamentalebene und statt der Größen α und δ in Bezug auf sie, die Ekliptik als solche und die ihr entsprechenden Größen λ und β einführt, identisch mit

$$D = \rho \sqrt{\cos^2 \delta \, \Delta\alpha^2 + \Delta\delta^2} = \rho \cos \beta \, \Delta\lambda = \rho \Delta\lambda$$

wegen $\beta = 0$. Das Vorzeichen von D wurde daher so gewählt, daß es dem von cos δ $\Delta\alpha$ gleich ist.

Aus den angegebenen Zahlen berechnete ich:

AR.	l	m	n	Ω	i
			I. 1888 Jänner 7.—27.		
0h	7_n8006	9_n5697	9·9678	359° 2′	21°48′
2	9·0976	9_n6421	9·9494	375 56	27 8
4	—	—	—	(249 16)	(41 24)
6	8·1945	9_n6163	9·9592	362 10	24 26
8	8·3316	9_n6047	9·9615	363 3	23 46
10	8_n2364	9_n4686	9·9803	356 39	17 8
12	8_n0139	9_n4363	9·9832	357 50	15 51
14	7_n4976	9_n4672	9·9805	359 23	17 3
16	7·6667	9_n5266	9·9740	360 47	19 39
18	8_n3313	9_n5813	9·9658	356 47	22 27
20	8·0757	9_n5841	9·9654	361 47	22 35
22	8_n2626	9_n5920	9·9639	357 19	23 2
			II. 1888 Mai 6.—26.		
0h	8_n0549	9_n6043	9·9617	358°23′	23°43′
2	6·0662	9_n6025	9·9621	360 1	23 36
4	7·9710	9_n5717	9·9675	361 26	21 54
6	8·3787	9_n5888	9·9644	363 32	22 52
8	8_n1693	9_n6288	9·9566	358 0	25 12
10	7_n6434	9_n5691	9·9679	360 41	21 46
12	—	—	—	(177 57)	(88 21)
14	8_n1593	9_n4538	9·9817	357 6	16 32
16	8·5355	9_n4926	9·9776	366 18	18 14
18	7_n7911	9_n5600	9·9684	350 20	21 37
20	9_n1706	9_n6482	9·9461	341 34	27 58
22	8_n4136	9_n6124	9·9599	356 12	24 14

Bis auf die der Rektaszension 4^h für die erste und die von 12^h für die zweite Gruppe entsprechenden Werte von Ω und i weisen die Zahlen in den zwei letzten Kolonnen eine fast überraschende Übereinstimmung auf.

Sie geben als Mittel

I. aus 1888 Jänner 7.—27..... $\Omega = 360° 58'$ $i = 21° 21'$

II. » 1888 Mai 6.—26..... $\Omega = 357° 40'$ $i = 22° 33'$

gegenüber den richtigen Werten $\Omega = 360°$ $i = 23° 27'$. Die bei $\alpha = 4^h$ in Gruppe I. und $\alpha = 12^h$ in Gruppe II. auftretenden größeren Differenzen erklären sich aus dem Umstande, daß hier beide die Grundlage der Rechnung bildenden Werte, nämlich $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ sehr klein wird und daher der Quotient $\operatorname{tg} i \cos\Omega = \Delta\delta / \cos^2\delta\,\Delta\alpha$ fast in der Form 0/0 erscheint.

3. Bestimmung des Apex der Erdbewegung.

Nach der Methode von Airy hat man in der Ausdrucksweise der Stellarastronomie $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ gewissermaßen als die von der Erde aus beobachteten Eigenbewegungen der Planeten, die Größen Δx, Δy und Δz als deren Spezialbewegungen und ΔX, ΔY ΔZ als die Komponenten der Eigenbewegung der Erde aufzufassen. Indem man die Gleichungen

$$\Delta\xi = \Delta x - \Delta X \qquad \Delta\eta = \Delta y - \Delta Y \qquad \Delta\zeta = \Delta z - \Delta Z$$

über eine größere Zahl von Planeten ermittelt und annimmt, daß sich in diesen Mittelwerten die Δx, Δy und Δz aufheben, erhält man

$$\frac{1}{n}\Sigma\Delta\xi = -\Delta X \qquad \frac{1}{n}\Sigma\Delta\eta = -\Delta Y \qquad \frac{1}{n}\Sigma\Delta\zeta = -\Delta Z$$

als Ausdruck der Airy'schen Methode zur Bestimmung des Apex der Erdbewegung in rechtwinkeligen Koordinaten. Bei Einführung von Polarkoordinaten sind die Gleichungen zu ersetzen durch

$$\frac{1}{n}\Sigma\rho\cos\delta\Delta\alpha = -\Delta X\gamma_{11} - \Delta Y\gamma_{21}$$

$$\frac{1}{n}\Sigma\rho\Delta\delta = -\Delta X\gamma_{12} - \Delta Y\gamma_{22} - \Delta Z\gamma_{32}$$

$$\frac{1}{n}\Sigma\Delta\rho = -\Delta X\gamma_{13} - \Delta Y\gamma_{23} - \Delta Z\gamma_{33}$$

aus denen, aus jeder einzelnen von ihnen, oder aus den $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ allein, oder aus allen dreien zusammen, die ΔX, ΔY und ΔZ nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden können. Damit ergeben sich verschiedene Werte für die Unbekannten, deren Übereinstimmung ein Mittel an die Hand gibt, die Genauigkeit der erzielten Resultate oder der zu ihrer Berechnung angewandten Methoden zu prüfen. Außerdem kann man selbst diese Zahl noch dadurch verdoppeln, daß man die Rechnungen durchführt, einmal mit Einbeziehung von ρ, das heißt mit den Größen $\rho\Delta\alpha\cos\delta$, $\rho\Delta\delta$ und $\Delta\rho$ oder ohne ihre Berücksichtigung, das heißt nur mit $\cos\delta\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\Delta\rho/\rho$ und analog mit $\Delta\xi/\rho$, $\Delta\eta/\rho$ und $\Delta\zeta/\rho$.

Bezeichnet man die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn mit G, die Koordinaten ihrer Bewegungsrichtung, die Rektaszension und Deklination des Apex mit A und D, endlich mit R die mittlere Distanz der Erde von der Sonne und r die der Planeten, so hat man im ersten Falle

$$\Delta X_1 = rG\cos D\cos A \qquad \Delta Y_1 = rG\cos D\sin A \qquad \Delta Z_1 = rG\sin D$$

im zweiten Falle dagegen

$$\Delta X_2 = G\cos D\cos A \qquad \Delta Y_2 = G\cos D\sin A \qquad \Delta Z_2 = G\sin D$$

zu setzen und damit ist die Möglichkeit gegeben, aus ihnen nicht bloß G, A und D, sondern auch r zu berechnen.

Man erhält vorerst die spezielle Gruppe der $\rho\cos\delta\Delta\alpha$, $\rho\Delta\delta$ und $\Delta\rho$ vornehmend, aus den einzelnen Teilen die Normalgleichungen:

a) aus $\rho\cos\delta\Delta\alpha$:

	I. 1888 Jänner 7. – 27.	II. 1888. Mai 6. – 26.
$-6\Delta X$	$= +6230{\cdot}0$	$-5897{\cdot}3$
$-6\Delta Y$	$= +3159{\cdot}7$	$+3803{\cdot}7$

b) aus $\rho\Delta\delta$:

$$-0\cdot2380\,\Delta X = +\ 212'2 \quad -\ 222'5$$
$$-0\cdot7135\,\Delta Y + 2\cdot2430\,\Delta Z = -\ 157\cdot3 \quad -\ 164\cdot2$$
$$+2\cdot2430\,\Delta Y - 11\cdot0488\,\Delta Z = +\ 1435\cdot3 \quad +\ 1560\cdot5;$$

c) aus $\Delta\rho$:

$$-5\cdot7620\,\Delta X = +\ 4839'5 \quad -4198'7$$
$$-5\cdot2865\,\Delta Y - 2\cdot2430\,\Delta Z = +\ 2536\cdot9 \quad +3001\cdot8$$
$$-2\cdot2430\,\Delta Y - 0\cdot9512\,\Delta Z = +\ 1076\cdot2 \quad +1272\cdot2$$

und aus ihnen nach Addition der Gleichungen für $\rho\cos\delta\Delta\alpha$ und $\rho\Delta\delta$ als erstes und nach Addition aller drei zusammen oder, was dasselbe ist, aus den $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ als zweites Ergebnis:

I. 1888 Jänner 7—27.		II. 1888 Mai 6—26.	
$A_1 = 206°\ 59'$	$A_2 = 206°\ 9'$	$A_1 = 327°\ 12'$	$A_2 = 327°\ 14'$
$D_1 = -11\ 32'$	$D_2 = -11\ 18$	$D_1 = -12\ 59$	$D_2 = -13\ 2$
$\lg(rG) = 3\cdot0731$	$\lg(rG) = 3\cdot0286$	$\lg(rG) = 3\cdot0784$	$\lg(rG) = 3\cdot0210$

Beide stimmen miteinander recht gut überein und ebenso auch mit den dem Berliner Jahrbuch für die Zeiten 1888 Jänner 17 und Mai 16 direkt zu entnehmenden Werten:

I.	II.
$A = 205°\ 3'$	$A = 327°\ 17'$
$D = -10\ 25$	$D = -13\ 12'$

Für die zweite Gruppe, in die die bloßen scheinbaren Bewegungen $\cos\delta\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\Delta\rho/\rho$ in die Rechnung einbezogen werden, ändern sich nur die rechten Seiten der Gleichungen.

Sie werden:

a) aus $\cos\delta\Delta\alpha$:

I. 1888 Jänner 7.—27.	II. 1888 Mai 6.—26.
$= +1986'7$	$-1873'7$
$= +1088\cdot5$	$+1274\cdot7$

b) aus $\Delta\delta$:

$= +\ 62\cdot7$	$-\ 67\cdot7$
$= -\ 52\cdot8$	$-\ 53\cdot4$
$= +\ 494\cdot6$	$+\ 511\cdot0$

c) aus $\Delta\rho/\rho$:

$= +1902\cdot5$	$-1637\cdot9$
$= +1019\cdot8$	$+1133\cdot9$
$= +\ 432\cdot9$	$+\ 480\cdot6$

und geben für die unbekannten A, D und $\lg G$ die Wertepaare

I. 1888 Jänner 7.—27.		II. 1888 Mai 6.—26.	
$A_1 = 208°\ 55'$	$A_2 = 207°\ 29'$	$A_1 = 325°\ 47'$	$A_2 = 326°\ 38'$
$D_1 = -12\ 16$	$D_2 = -11\ 46$	$D_1 = -13\ 16$	$D_2 = -13\ 2$
$\lg G = 2\cdot5845$	$\lg G = 2\cdot5788$	$\lg G = 2\cdot5894$	$\lg G = 2\cdot5641$

die sowohl untereinander, wie auch mit den vorher gefundenen in bestem Einklange stehen. Aus ihnen folgen durch Vergleich der Werte für lg $(r\,G)$ und lg G, für die mittlere Entfernung der Planeten von der Sonne die Einzelresultate

$$\lg\, r = 0{\cdot}4886, \qquad 0{\cdot}4498, \qquad 0{\cdot}4890, \qquad 0{\cdot}4569$$

wobei lg $(r\,G)$ andrerseits die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bewegung um die Sonne bedeutet, für die aus der Theorie in den hier angenommenen Maßeinheiten (Bogenminuten und 20 Tage als Zeiteinheit)

$$\lg\,(r\,G) = 3{\cdot}0729$$

anzusetzen ist. Man erkennt, daß die Airy'sche Methode, die bisher bloß auf die Eigenbewegungen der Fixsterne angewandt wurde, in ihrer Ausdehnung auf die Bewegung der Planeten zu mit der hier direkt kontrollierbaren Theorie in bester Übereinstimmung stehenden Ergebnissen führt.

4. Teilung der Beobachtungen nach Konjunktion und Opposition.

Aber noch mehr. Man kann in der Ausdehnung der Airy'schen Methode auf die Bewegung der Planeten einen Schritt weiter gehen, in dem man die den 12 Rektaszensions-Doppelstunden entsprechenden Mittelwerte der cos $\delta\,\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\Delta\rho$ nochmals in zwei Teile zerlegt, und zwar derart, daß man die der Periode der Konjunktion gegenüber der Erde entsprechenden Stunden von jenen trennt, die der Oppositionszeit angehören. Für jene ist $\Delta\alpha$ positiv, für diese negativ.

Die von mir angenommene Teilung war die folgende:

I. Für Jänner 17: AR. 0^h, 2^h, 14^h, 16^h, 18^h, 20^h, 22^h als der Konjunktion,
4^h, 6^h, 8^h, 10^h, 12^h als der Opposition,

II. Für Mai 16: AR. 0^h, 2^h, 4^h, 6^h, 8^h, 10^h, 22^h als der Konjuktion,
12^h, 14^h, 16^h, 18^h, 20^h als der Opposition

angehörig und danach ergaben sich die Normalgleichungen, die ich jedoch nur für die Gesamtgruppen berechnete:

A: aus den $\rho\,\cos\,\delta\Delta\alpha$, $\rho\Delta\delta$ und $\Delta\rho$:

a) Konjunktion

	I. 1888 Jänner 17.	II. 1888 Mai 16.
$-7\,\Delta X =$	$+8700{\cdot}7$	$-8104{\cdot}6$
$-7\,\Delta Y =$	$+4351{\cdot}7$	$+5056{\cdot}8$
$-7\,\Delta Z =$	$+2025{\cdot}4$	$+2217{\cdot}9$

b) Opposition

$-5\,\Delta X =$	$+2582{\cdot}0$	$-2213{\cdot}8$
$-5\,\Delta X =$	$+1187{\cdot}8$	$+1584{\cdot}5$
$-5\,\Delta Z =$	$+\ 486{\cdot}1$	$+\ 614{\cdot}8$

mit den aus ihnen abgeleiteten Werten:

I. *a)*	$A = 206°\ 37'$	*b)*	$A = 204°\ 42'$	II. *a)*	$A = 328°\ 3'$	*b)*	$A = 324°\ 24'$
	$D = -11\ \ 45$		$D = -9\ \ 42$		$D = -12\ \ 51$		$D = -12\ \ 43$
	$\lg\,(r\,G) = 3{\cdot}1523$		$\lg\,(r\,G) = 2{\cdot}7609$		$\lg\,(r\,G) = 3{\cdot}1461$		$\lg\,(r\,G) = 2{\cdot}7468$

B: aus den cos $\delta\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ und $\Delta\rho/\rho$ dagegen

a) Konjunktion

$$-7\,\Delta X = +2696{\cdot}3 \qquad -2503{\cdot}9$$
$$-7\,\Delta Y = +1441{\cdot}8 \qquad +1600{\cdot}2$$
$$-7\,\Delta Z = +\ 676{\cdot}8 \qquad +\ 700{\cdot}7$$

b) Opposition

$$-5\,\Delta X = +1225{\cdot}6 \qquad -1075{\cdot}4$$
$$-5\,\Delta Y = +\ 613{\cdot}7 \qquad +\ 755{\cdot}1$$
$$-5\,\Delta Z = +\ 250{\cdot}7 \qquad +\ 291{\cdot}0$$

mit den neuen Werten:

I. *a)*	*b)*	II. *a)*	*b)*
$A = 208^\circ\ 8'$	$A = 206^\circ\ 3'$	$A = 327^\circ\ 25'$	$A = 324^\circ\ 56'$
$D = -12\ 29$	$D = -10\ 10$	$D = -13\ 16$	$D = -12\ 29$
$\lg G = 2{\cdot}6506$	$\lg G = 2{\cdot}4533$	$\lg G = 2{\cdot}6396$	$\lg G = 2{\cdot}4300.$

Auch diese Zahlen zeigen, was die Größen A und D anlangt, eine schöne Übereinstimmung. Aus den $\lg (r\,G)$ und $\lg G$ dagegen folgt für die mittlere Entfernung der Planeten von der Sonne

a) für die Konjunktion	$\lg r = 0{\cdot}5017$	$0{\cdot}5065$
b) » » Opposition	$\lg r = 0{\cdot}3076$	$0{\cdot}3168$

und diese lassen nunmehr klar die exzentrische Stellung der Erde gegenüber dem Kreise erkennen, in dem die Planeten sich um die Sonne bewegen und dessen Radius im Mittel zu $\lg r = 0{\cdot}4711$ gefunden wurde. Die Größe der Exzentrizität ergibt sich aus ihnen zu

$$1{\cdot}1442 \qquad 1{\cdot}1359$$

und dies wäre die Größe R, das ist die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne. Es ist also

für die Konjunktion $\rho = r + R$

» » Opposition $\rho = r - R.$

Gleicher Art bedeuten die Größen G für die beiden Perioden Summe, beziehungsweise Differenz der mittleren Geschwindigkeit der Erde und der Planeten und aus ihnen bestimmen sich diese selbst zu:

für die Erde.....998′4 beziehungsweise 979′0

gegenüber dem theoretischen Wert 1182′7

für die Planeten.....421′7 » 420′8

welche beide nach dem dritten Kepler'schen Gesetze einer mittleren Entfernung $\lg r = 0{\cdot}2990$ entsprechen, was im Vergleiche mit den vorher erhaltenen $\lg r = 0{\cdot}477\ldots$ auf eine geringere Übereinstimmung hinweist.

5. Die Bessel-Kobold'sche Methode der Apexbestimmung.

Neben der Airy'schen Methode zur Bestimmung des Apex der Sonnenbewegung kommt in der Stellarastronomie noch die Bessel-Kobold'sche Methode in Betracht. Auch sie läßt eine Anwendung auf die Bewegung der Erde zu. Ihrem Wesen nach besteht sie in der Forderung, die Größe

$$M = \Sigma\,(l\,U + m\,V + n\,W)^2$$

in der l, m und n die Richtungscosinus der Bahnebene der Sterne oder der Pole ihrer Eigenbewegung, ferner U, V und W die gleichen Richtungscosinus des Apex der Sonnenbewegung bedeuten und die

Summation Σ sich über alle benützten Sterne erstreckt, zu einem Minimum zu machen, wozu als Nebenbedingung die Relation

$$U^2+V^2+W^2=1$$

hinzukommt. Die Lösung dieser Aufgabe ist bekanntlich identisch mit der, die Gleichung des Ellipsoids

$$Ax^2+2By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=1,$$

in welcher

$$A=\Sigma l^2 \qquad B=\Sigma m^2 \quad C=\Sigma n^2$$
$$D=\Sigma mn \quad E=\Sigma nl \quad F=\Sigma lm$$

ist, auf die Hauptachsen zu reduzieren. Man hat also die kubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & F & E \\ F & B-\lambda & D \\ E & D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

nach λ aufzulösen und erhält ihren drei Wurzeln entsprechend für die Unbekannten U, V und W die drei Gruppen von homogenen Gleichungen:

$$\begin{aligned} (A-\lambda)U+ \quad FV \quad + \quad EW \quad &= 0 \\ FU \quad + (B-\lambda)V+ \quad DW \quad &= 0 \\ EU \quad + \quad DV \quad + (C-\lambda)W &= 0 \end{aligned}$$

aus denen die Verhältnisse der U, V und W zu berechnen sind.

Die Frage nach der Bedeutung der drei Wurzeln der Determinantengleichung und der ihnen entsprechenden Wertesysteme der U, V und W, die ihrer Definition nach den bisherigen ΔX, ΔY und ΔZ proportional sind, indem

$$U=G\Delta X \quad V=G\Delta Y \quad W=G\Delta Z$$

ist, löst sich in der folgenden Weise:

Es laute die kubische Gleichung in aufgelöster Form

$$\lambda^3-J_1\lambda^2+J_2\lambda-J_3=0,$$

dann ist

$$J_1=A+B+C$$
$$J_2=AB-F^2+BC-D^2+CA-E^2$$
$$J_3=ABC+2DEF-AD^2-BE^2-CF^2.$$

Nach der Definition der Größen l, m und n ist $l^2+m^2+n^2=1$ und daher $J_1=\Sigma(l_\varkappa^2+m_\varkappa^2+n_\varkappa^2)=p$, wenn p die Anzahl der zur Rechnung benützten statistischen Mittelwerte der Eigenbewegungen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ bedeutet. Denkt man sich die Koeffizienten A, B.. F der Ellipsoidgleichung durch diese Zahl dividiert, so kann man stets

$$J_1=A+B+C=1$$

annehmen. Zur Umformung von J_2 sei wieder das nachstehende ausgeführt. Nach einem bekannten Satz der Determinantentheorie ist

$$AB-F^2=\Sigma(l_\varkappa^2)\Sigma(m_\varkappa^2)-(\Sigma l_\varkappa m_\varkappa)^2=\Sigma\Sigma(l_\varkappa m_\lambda-l_\lambda m_\varkappa)^2$$

die Doppelsumme über die zwei Indizes $\varkappa$ und λ erstreckt. Ebenso ist

$$BC-D^2=\Sigma\Sigma(m_\varkappa n_\lambda-m_\lambda n_\varkappa)^2$$
$$CA-E^2=\Sigma\Sigma(n_\varkappa l_\lambda-n_\lambda l_\varkappa)^2$$

und damit wird deren Summe

$$J_2 = \Sigma\Sigma\,[1-(l_\varkappa l_\lambda + m_\varkappa m_\lambda + n_\varkappa n_\lambda)^2]$$

oder, wenn man wieder die Größen Ω und i einführt:

$$J_2 = \Sigma\Sigma\,(1-(\cos i_\varkappa \cos i_\lambda + \sin i_\varkappa \sin i_\lambda \cos\,(\Omega_\varkappa - \Omega_\lambda))^2].$$

Jede Gruppe der Größen l, m und n bestimmt nun einen Vektor im Raume und mit ihm einen Punkt auf der scheinbaren Himmelskugel. Bezeichnet man ihn mit $P_\varkappa$, beziehungsweise P_λ, so ist

$$\cos i_\varkappa \cos i_\lambda + \sin i_\varkappa \sin i_\lambda \cos\,(\Omega_\varkappa - \Omega_\lambda) = \cos S_{\varkappa\lambda},$$

das heißt gleich dem cos der sphärischen Distanz S zweier dieser Punkte und man hat nunmehr in kurzer Form

$$J_2 = \Sigma\Sigma \sin^2 S_{\varkappa\lambda}.$$

In gleicher Art folgt für J_3 die dreifache Summe $\Sigma\Sigma\Sigma$, erstreckt über die drei Indizes $\varkappa$, λ und μ,

$$J_3 = \Sigma\Sigma\Sigma \begin{vmatrix} 1 & \cos S_{\varkappa\lambda} & \cos S_{\varkappa\mu} \\ \cos S_{\lambda\varkappa} & 1 & \cos S_{\lambda\mu} \\ \cos S_{\mu\varkappa} & \cos S_{\mu\lambda} & 1 \end{vmatrix} = \Sigma\Sigma\Sigma \sin^2 S_{\varkappa\lambda\mu}$$

wenn man mit $\sin S_{\varkappa\lambda\mu}$ den Eckensinus der vom Mittelpunkte der Kugel nach den drei Punkten $P_\varkappa$, P_λ und P_μ gezogenen Kanten bezeichnet. Die kubische Gleichung läßt sich somit in der Form

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda\,\Sigma\Sigma \cdot \sin^2 S_{\varkappa\lambda} - \Sigma\Sigma\Sigma \sin^2 S_{\varkappa\lambda\mu} = 0$$

anschreiben und ihre Diskussion führt zu der gesuchten Bedeutung ihrer Wurzeln. Fallen nämlich die einzelnen Punkte P zusammen, das heißt ist $P_\varkappa \equiv P_\lambda \equiv P_\mu$, so ist

$$\sin S_{\varkappa\lambda} = \sin S_{\varkappa\lambda\mu} = 0$$

die kubische Gleichung geht über in

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0.$$

Sie hat zwei Wurzeln gleich 0, und eine gleich 1, das Ellipsoid degeneriert in eine Ebene, und zwar ist diese Ebene der größte Kugelkreis, dessen Pol der Punkt P ist. Es ist dieser Kreis nichts anderes als die Bahnebene der Sterne, beziehungsweise der Planeten. Im konkreten Falle werden die einzelnen Punkte P nicht ganz zusammenfallen, sondern ein wenig voneinander verschiedene Lagen an der scheinbaren Himmelssphäre einnehmen. Faßt man diese Unterschiede als kleine Größen erster Ordnung auf, so wird J_2 eine kleine Größe zweiter, J_3 eine solche dritter Ordnung sein und die Wurzeln der kubischen Gleichung werden wohl nicht mehr

1 0 0

lauten, aber doch von diesen nur wenig differieren. Der ersten Wurzel = 1 wird auch fernerhin die Richtung nach dem Pole der Bahnebene entsprechen, die beiden anderen dagegen stellen ganz bestimmte Richtungen im Raume vor, die in dieser Ebene liegen und aufeinander senkrecht stehen. Es ist klar, daß die kleinste gemäß der Definition des Apex als der Bedingung des Minimums nach diesem, die mittlere daher notwendigerweise nach dem Zentrum der Bewegung hinweist.

Mit den schon oben angesetzten Werten der Vektorcosinus l, m und n fanden sich die Koeffizienten der Ellipsoidgleichung zu:

I	II	I	II
$A = +0{\cdot}01781$	$+0{\cdot}02885$	$D = -3{\cdot}68684$	$-3{\cdot}83957$
$B = +1{\cdot}46859$	$+1{\cdot}60499$	$E = +0{\cdot}08871$	$-0{\cdot}18200$
$C = +9{\cdot}51360$	$+9{\cdot}36616$	$F = -0{\cdot}04964$	$+0{\cdot}08878.$

Damit folgen die zwei kubischen Gleichungen, schon auf die Beziehung $A + B + C = 1$ reduziert

$$\text{I: } \lambda^3 - \lambda^2 + 0{\cdot}0046616\,\lambda - 0{\cdot}0000031661 = 0$$

$$\text{II: } \lambda^3 - \lambda^2 + 0{\cdot}0046738\,\lambda - 0{\cdot}0000041150 = 0$$

und die Richtungen der Hauptachsen:

a) größte Wurzel $\equiv$ Pol der Bahnebene

$$\text{I: } A = 271^\circ\ 27'\quad D = +68^\circ\ 44'$$

$$\text{II: } A = 267\ \ 13\quad D = +67\ \ 38$$

und daraus Knoten und Neigung dieser selbst

$$\text{I: } \Omega = 361^\circ\ 27'\qquad i = 21^\circ\ 16'$$

$$\text{II: } \Omega = 357\ \ 13\qquad i = 22\ \ 22$$

b) mittlere Wurzel $\equiv$ Richtung nach dem Zentrum der Erdbewegung

$$\text{I: } A = 120^\circ\ 46'\qquad D = +18^\circ\ 44'$$

$$\text{II: } A = 223\ \ 53\qquad D = -16\ \ 44$$

c) kleinste Wurzel $\equiv$ Richtung nach dem Apex

$$\text{I: } A = 207^\circ\ 23'\qquad D = -\ 9^\circ\ 39'$$

$$\text{II: } A = 318\ \ 21\qquad D = -14\ \ 29$$

Schreibt man schließlich die Gleichung des Ellipsoids in der Form an

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1,$$

so deutet der Koeffizient c auf einen Abstand von der durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems, das ist die Sonne gehenden Ebene hin, in welchem Falle $c = 1$ sein müßte; man kann also, wenn man diesen Abstand mit S bezeichnet, $c = \cos S$ setzen, dann wird $a = \sin S \cos T$, $b = \sin s \sin T$, wegen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ und man erhält:

$$\text{I: } a = 0{\cdot}02872\qquad b = 0{\cdot}06209\qquad c = 0{\cdot}99765\qquad S = 3^\circ\ 55'\qquad T = 114^\circ\ 50'$$

$$\text{II: } a = 0{\cdot}03429\qquad b = 0{\cdot}05929\qquad c = 0{\cdot}99766\qquad S = 3\ \ 55\qquad T = 239\ \ 59$$

Man sieht, daß S nur wenig von 0 verschieden ist und daß ferner die Richtung T mit der Richtung nach dem Zentrum der Bewegung zusammenfällt, wenn auch die Abweichung hiebei ein wenig größer ist.

6. Andere Methoden der Apexbestimmung.

Das der Bessel-Kobold'schen Methode der Berechnung des Apex zugrunde liegende Prinzip, den Ausdruck $\Sigma (l U + m V + n W)^2$ zu einem Minimum zu machen, läßt bekanntlich eine einfache geometrische Deutung zu. Es besagt, daß man jenen Punkt als Apex bezeichnet, für welchen die Quadratsumme der Abstände von der Ebene $lx + my + nz = 0$ oder auf die scheinbare Himmelskugel bezogen, von dem durch l, m, n bestimmten größten Kugelkreise ein Minimum werde. Es ist klar, daß diese Definition des Apex eine ganz willkürliche ist und daß man an Stelle der erwähnten Quadratsumme irgendwelche andere setzen kann. Tut man dies, so ergeben sich damit eine große Zahl anderer Methoden der Apexberechnung. Einige von ihnen seien hier noch behandelt.

Es bedeute $\Delta\rho$ die Radialbewegung eines Sternes, oder besser den Mittelwert der Radialbewegungen einer Gruppe von Sternen in einem begrenzten Gebiete des Himmels, ferner seien γ_{13}, γ_{23} und γ_{33} ihre Richtungscosinus und endlich U, V und W die Vektoren der Eigenbewegung der Sonne,

beziehungsweise der Erde, wenn an Stelle von Sternen die Planeten betrachtet werden, so möge als Definition des Apex die Bedingung aufgestellt werden, den Ausdruck

$$\Sigma\,[\Delta\rho\,(\gamma_{13}\,U+\gamma_{23}\,V+\gamma_{33}\,W)]^2,$$

der ebenfalls eine einfache geometrische Bedeutung hat, mit der Nebenbedingung

$$U^2+V^2+W^2=1$$

zu einem Minimum zu machen. Offenbar kann man $\Delta\rho$ durch eine andere Geschwindigkeitskomponente ersetzen, zum Beispiel durch $\cos\delta\,\Delta\alpha$ oder durch

$$\sqrt{(\cos\delta\,\Delta\alpha)^2+\Delta\delta^2}$$

und erhält dementsprechend wieder andere Bedingungsgleichungen und andere Rechnungsresultate. Die Lösung der Aufgabe führt in allen Fällen auf dasselbe Problem, nämlich die Gleichung des Ellipsoids

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy=1$$

in der nunmehr

$$A=\Sigma\,(\Delta\rho\gamma_{13})^2 \qquad B=\Sigma\,(\Delta\rho\gamma_{23})^2 \qquad C=\Sigma\,(\Delta\rho\,\gamma_{33})^2$$
$$D=\Sigma\,(\Delta\rho^2\gamma_{23}\,\gamma_{33}) \quad E=\Sigma\,(\Delta\rho^2\,\gamma_{33}\,\gamma_{13}) \quad F=\Sigma\,(\Delta\rho^2\,\gamma_{13}\,\gamma_{23})$$

ist, auf die Hauptachsen zu reduzieren.

Ich habe die betreffende Rechnung zunächst für die Größe $\Delta\rho$ durchgeführt und erhielt für die Koeffizienten A, $B\ldots F$ die Werte:

I	II	I	II
$A=3258990$	2645600	$D=+\ 725490$	$+\ 763760$
$B=1726100$	1811440	$E=+\ 417000$	$-\ 447530$
$C=\ 305080$	322320	$F=+1005260$	-1079180

Ihre Determinante, das ist

$$\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix}$$

ist fast gleich Null. Ich nahm sie direkt $=0$ an, so daß eine Wurzel aus der ihr folgenden kubischen Gleichung

$$\lambda^3-J_1\lambda_2+J_2\lambda-J_3=0$$

wegen $J_3=0$, Null ist. Die ihr entsprechende Hauptachsenrichtung ist die nach dem Pole der Bahnebene, und zwar fand sich:

I: $A=273^\circ\ 15'$ $D=\ \ 64^\circ\ 18'$ und damit $\Omega=363^\circ\ 15'$ $i=25^\circ\ 42'$
II: $A=\ 85\ \ 1$ $D=-65\ \ 57$ » » $\Omega=355\ \ 1$ $i=24\ \ 3$,

während die beiden anderen Wurzeln, in der Reihenfolge mittlere und größte

a) I: $A=208^\circ\ 14'$ $D=-11^\circ\ 25'$
II: $A=323\ \ 22$ $D=-14\ \ 3$

als Richtung nach dem Apex und

b) I: $A=302^\circ\ 19'$ $D=-19^\circ\ 40'$
II: $A=\ 48\ \ 44$ $D=+18\ \ 0$

als Richtung nach dem Mittelpunkte der Erdbewegung, das ist der Sonne lieferten.

Es liegt nun bei dem Umstande, daß eine der Wurzeln der kubischen Gleichung stets mit der Bahnebene zusammenhängt, der Gedanke nahe, die Rechnung dadurch von vorneherein zu vereinfachen, daß man alle in sie einzubeziehenden Größen, wie die Vektoren, γ, ferner die U, V und W direkt auf die Bahnebene reduziert, das ist sich für den Fall der Planeten statt auf den Äquator auf die Ekliptik bezieht. Dadurch verwandelt sich das räumliche Problem in ein ebenes und die Determinantengleichung dritten Grades geht in eine vom zweiten Grade über.

Bezeichnet man die auf die Ekliptik bezogenen Koordinaten der Planeten mit dem Buchstaben l, und zwar λ als deren geozentrische Länge, l, die heliozentrische und L sowie $90 + L$ die Länge der Sonne, sowie die des Apex der Erdbewegung, während man alle Breiten $= 0$ annimmt, erwägt ferner, daß für die Ekliptik von den Vektoren γ nur

$$\gamma_{11} = -\gamma_{23} = -\sin\lambda \qquad \gamma_{32} = 1 \quad \gamma_{33} = \gamma_{12} = \gamma_{22} = 0$$
$$\gamma_{21} = \gamma_{13} = \cos\lambda$$

übrig bleiben, schließlich

$$U = \cos L \qquad V = \sin L \qquad W = 0$$

wird, so schreibt sich die Minimumsbedingung zur Bestimmung des Apex in der einfachen Form an

$$\Sigma\,[\Delta\rho\,\cos\,(\lambda - L)]^2 = \text{Min.}$$

oder, wenn man die Radialbewegung $\Delta\rho$ durch die Bewegung in Länge $\rho\Delta\lambda$ ersetzt,

$$\Sigma\,[\rho\Delta\lambda\,\cos\,(\lambda - L)]^2 = \text{Min.}$$

oder, wenn man die totale Geschwindigkeit der Planeten g einführt, wo $g = \sqrt{(\rho\Delta\lambda)^2 + (\Delta\rho)^2}$

$$\Sigma\,[g\,\cos\,(\lambda - L)]^2 = \text{Min.}$$

Ich führe zunächst die Einzelwerte der $\Delta\rho$, $\rho\Delta\lambda$ und g an. Sie sind:

λ	$\Delta\rho$	$\rho\Delta\lambda$	g	$\Delta\rho$	$\rho\Delta\lambda$	g
	I. 1888 Jänner 7.—27.			II. 1888 Mai 6.—26.		
0^h	+ 821'9	+ 1238'3	1486'2	— 657'8	+ 1321'7	1476·3
2	+ 929·9	+ 677·9	1150·2	— 358·1	+ 1800·1	1835·4
4	+ 818·1	+ 8·9	818·2	+ 157·9	+ 1899·7	1906·2
6	+ 471·4	— 294·3	555·7	+ 534·6	+ 1708·3	1790·0
8	— 35·2	— 510·7	511·9	+ 850·2	+ 1204·0	1473·9
10	— 495·8	— 362·9	614·4	+ 908·7	+ 567·5	1071·4
12	— 830·0	+ 168·4	846·9	+ 747·6	— 27·1	748·1
14	— 931·0	+ 707·3	1169·2	+ 357·8	— 390·1	529·4
16	— 791·7	+ 1281·0	1505·9	— 92·2	— 473·0	481·9
18	— 414·8	+ 1782·2	1829·8	— 462·9	— 347·3	578·7
20	— 28·4	+ 1912·8	1913·1	— 818·9	+ 170·4	836·4
22	+ 505·5	+ 1690·5	1764·5	— 881·8	+ 759·8	1164·0

und aus ihnen ergab sich:

a) aus der Bedingung

$$\Sigma\,[\Delta\rho\,\cos\,(\lambda - L)]^2 = M.$$

die Ellipsengleichung

$$\text{I: } 3363400\,x^2 + 2185200\,xy + 1925740\,y^2 = 1$$
$$\text{II: } 2742900\,x^2 - 2344300\,xy + 2034750\,y^2 = 1$$

mit

$$L = 118^\circ\ 20' \quad \text{bez.} \quad 233^\circ\ 24'.$$

b) aus der Bedingung

$$\Sigma\,[\rho\,\Delta\lambda\,\cos\,(\lambda - L)]^2 = \text{Min.}$$

$$\text{I: } 5291565\,x^2 - 3407400\,xy + 8159785\,y^2 = 1$$
$$\text{II: } 6294140\,x^2 + 4195300\,xy + 8095060\,y^2 = 1$$

mit

$$L = 114^\circ\ 57' \quad \text{bez.} \quad 236^\circ\ 37'.$$

c) aus der Bedingung

$$\Sigma\,[g\,\cos\,(\lambda - L)]^2 = \text{Min.}$$

$$\text{I: } 9276140\,x^2 - 1547160\,xy + 10346290\,y^2 = 1$$
$$\text{II: } 9031180\,x^2 + 1853280\,xy + 10129520\,y^2 = 1$$

mit

$$L = 117^\circ\ 40' \quad \text{bez.} \quad 240^\circ\ 19'.$$

Wie man erkennt, stehen diese Werte sowohl untereinander als auch mit den vorher gefundenen in guter Übereinstimmung, so daß diese Bedingungsgleichungen als neue Methoden der Bestimmung des Apex auch bei Anwendung auf die Eigenbewegungen der Fixsterne erfolgreich zu sein versprechen.

7. Die Begrenzungskurve des Schwarmes der kleinen Planeten.

Der Schwarm der kleinen Planeten erfüllt in seiner Bewegung um die Sonne nahezu einen Kreisring von einer gewissen Breite, für dessen mittleren Halbmesser auch schon vorher einige Rechenresultate gefunden wurden. In diesem Kreisringe, oder wenn man seine Breite nicht berücksichtigt, in diesem Kreise nimmt die Erde eine exzentrische Stellung ein und es muß daher möglich sein, schon aus den der Ephemeride entnommenen Mittelwerten der ρ diesen exzentrischen Ort der Erde zu berechnen.

Nimmt man die Ebene der Ekliptik als Fundamentalebene an und schreibt die Gleichung dieses Kreises, den Erdort zum Anfangspunkt des Koordinatensystems wählend, in der Form

$$x^2 + y^2 - 2\,Dx - 2Ey = M$$

an, so hat man zur Bestimmung der Koeffizienten D, E und M die den 12 Werten

$$x = \rho\,\cos\,\lambda \qquad y = \rho\,\sin\,\lambda$$

entsprechenden 12 Gleichungen

$$\rho^2 - 2\,\rho\,(D\,\cos\,\lambda + E\,\sin\,\lambda) = M$$

aus denen nach der Methode der kleinsten Quadrate die D, E und M abzuleiten wären. Es genügt jedoch hier das folgende einfachere Verfahren. Bezeichnet man die den Längen λ und $180 + \lambda$ zukommenden ρ-Werte mit ρ_1 und ρ_2, so geben je zwei solche die Beziehungen

$$\rho_1^2 - 2\,\rho_1\,(D\,\cos\,\lambda + E\,\sin\,\lambda) = M$$
$$\rho_2^2 + 2\,\rho_2\,(D\,\cos\,\lambda + E\,\sin\,\lambda) = M$$

aus denen die je sechsfach zu zählenden Gleichungen

$$D\cos\lambda+E\sin\lambda=\frac{1}{2}(\rho_1-\rho_2)\qquad M=\rho_1\rho_2$$

folgen, deren Auflösung leichter durchzuführen ist und Resultate geben dürfte, die sich von den strenge nach der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen, nur wenig unterscheiden werden.

Mit den schon oben mitgeteilten Werten der ρ fand ich so als Gleichung der Begrenzungskurve diese schon in geordneter Form ansetzend:

I. 1888: Jänner 7.—27.

$$(x-0\cdot3163)^2+(y+0\cdot8887)^2=(2\cdot7527)^2$$

II. 1888: Mai 6.—26.

$$(x-0\cdot4232)^2+(y-0\cdot7717)^2=(2\cdot7775)^2$$

aus denen, wenn man sie mit der theoretischen Form

$$(x-R\cos L)^2+(y-R\sin L)^2=r^2$$

vergleicht,

$$\lg r=0\cdot4397\quad\text{bez.}\quad 0\cdot4437$$
$$\lg R=9\cdot9747\qquad\quad 9\cdot9531$$
$$L=109^\circ36'\qquad\quad 241^\circ53'$$

folgt. Ich versuchte es auch für diese Kurve eine Ellipse anzunehmen, deren Gleichung ich in der Form

$$ax^2+2bxy+cy^2-2dx-2ey=1$$

anschrieb. Aber die Rechnung ergab für den Koeffizienten b sowie für die Differenz $a-c$ so kleine Werte, daß die Ellipse sich nur wenig von einem Kreise unterschied und die auftretenden Differenzen wohl nur als Zufallsergebnisse aufzufassen wären.

Merkwürdigerweise zeigte sich ein ähnliches Resultat, indem ich an Stelle von ρ die totale Geschwindigkeit der Planeten g zur Rechnung benützte. Zerlegt man sie in die zwei Komponenten

$$u=g\cos\lambda\qquad v=g\sin\lambda$$

und setzt für diese die Gleichung eines Kreises in der gleichen Form wie für x und y fest

$$u^2+v^2-2Du-2Ev=M$$

oder geordnet

$$(u-\gamma\cos L)^2+(v-\gamma\sin L)^2=G^2,$$

so erhielt ich:

$$\text{I: }(u-334\cdot5)^2+(v+608\cdot2)^2=(1260\cdot7)^2$$
$$\text{II: }(u-387\cdot6)^2+(v-602\cdot5)^2=(1261\cdot4)^2$$

sowie aus ihnen

$$L=118^\circ\,49'\quad\text{bez.}\quad 237^\circ\,15'$$
$$\lg\gamma=2\cdot8414\quad\text{bez. }2\cdot8552\qquad\lg G=3\cdot1006\quad\text{bez.}\quad 3\cdot1008$$

und man erkennt in G nichts anderes als die Geschwindigkeit der Erde, die in den hier angenommenen Einheiten $1182'73$ sein sollte, während $\gamma=rg$ ist, mit g die der Planeten bezeichnet, so daß die Kreisgleichung (Hodograph)

$$(u+rg\cos L)^2+(v+rg\sin L)^2=G^2$$

lautet.

8. Fourier'sche Reihenentwicklungen.

Bei der Wahl der Ekliptik als Fundamentalebene treten an Stelle der drei Gleichungen für ξ, η und ζ pag. 3 [313] nur mehr zwei auf

$$\rho \cos \lambda = r \cos l - R \cos L$$
$$\rho \sin \lambda = r \sin l - R \sin L.$$

Aus ihnen folgt durch Differentiation, bei der jedoch r und R, da nur deren Mittelwerte in Betracht kommen, als Konstante anzusehen sind,

$$\Delta\rho \cos \lambda - \rho \sin \lambda \Delta\lambda = -r \sin l \Delta l + R \sin L \Delta L$$
$$\Delta\rho \sin \lambda + \rho \cos \lambda \Delta\lambda = \quad r \cos l \Delta l - R \cos L \Delta L.$$

In diesen vier Gleichungen hat man $\Delta\rho$ und $\Delta\lambda$ als bekannte, alle anderen als unbekannte Größen anzusehen und danach die Aufgabe, durch geeignete Entwicklungen diese durch jene darzustellen. Man findet zunächst durch passende Multiplikation mit $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$ und nachherige Addition, beziehungsweise Subtraktion

$$\Delta\rho = r\Delta l \sin(\lambda - l) - R\Delta L \sin(\lambda - L)$$
$$\rho\Delta\lambda = r\Delta l \cos(\lambda - l) - R\Delta L \cos(\lambda - L)$$

nun aus ihnen durch Elimination von $\lambda - l$ zufolge der Relationen

$$0 = r \sin(\lambda - l) - R \sin(\lambda - L)$$
$$\rho = r \cos(\lambda - l) - R \cos(\lambda - L),$$

die erste Gruppe

$$\Delta\rho = -R(\Delta L - \Delta l) \sin(\lambda - L)$$
$$\rho\Delta\lambda = \rho\Delta l \quad R(\Delta L - \Delta l) \cos(\lambda - L)$$

in denen noch die Unbekannte ρ steckt. Zu ihrer Berechnung hat man die quadratische Gleichung

$$r^2 = R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cos(\lambda - L)$$

oder geordnet

$$\rho^2 + 2\rho R \cos(\lambda - L) + R^2 - r^2 = 0$$

aus der, wenn man der Kürze halber $R/r = \beta$ ansetzt,

$$\frac{\rho}{r} = -\beta \cos(\lambda - L) + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\lambda - L)}$$

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\beta}{1-\beta^2} \cos(\lambda - L) + \frac{1}{1-\beta^2} \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\lambda - L)}$$

folgt. Es bleibt daher nur die Entwicklung von $\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\lambda - L)}$ durchzuführen. Unter der Annahme, daß $\beta < 1$ ist, gibt aber die Analysis

$$\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2(\lambda - L)} = a_0 + a_2 \cos 2(\lambda - L) - a_4 \cos 4(\lambda - L) + a_6 \cos 6(\lambda - L) -$$

worin

$$a_0 = 1 - \frac{1}{4}\beta^2 - \frac{3}{64}\beta^4 - \frac{10}{512}\beta^6 - \frac{175}{16384}\beta^8 + \ldots$$

$$a_2 = \frac{1}{4}\beta^2\left[1 + \frac{4}{16}\beta^2 + \frac{15}{128}\beta^4 + \frac{280}{4096}\beta^6 + \ldots\right.$$

$$a_4 = \frac{1}{64}\beta^4\left[1 + \frac{6}{8}\beta^2 + \frac{140}{256}\beta^4 + \ldots\right.$$

$$a_6 = \frac{1}{512}\beta^6\left[1 + \frac{40}{32}\beta^2 + \ldots\right.$$

$$a_8 = \frac{1}{16384}\beta^8[1 + \ldots$$

und mit deren Hilfe lassen sich als erste Gruppe die Entwicklungen aufstellen

$$\frac{\rho}{R} = \frac{a_0}{\beta} - \cos(\lambda - L) + \frac{a_2}{\beta}\cos 2(\lambda - L) - \frac{a_4}{\beta}\cos 4(\lambda - L) + \frac{a_6}{\beta}\cos 6(\lambda - L) - \ldots$$

$$\frac{R}{\rho} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\left[\frac{a_0}{\beta} + \cos(\lambda - L) + \frac{a_2}{\beta}\cos 2(\lambda - L) + \frac{a_4}{\beta}\cos 4(\lambda - L) + \frac{a_6}{\beta}\cos 6(\lambda - L) - \ldots\right.$$

und durch deren Substitution in die Gleichungen für $\Delta\rho$ und $\Delta\lambda$, als zweite Gruppe

$$\Delta\lambda = \Delta l - \frac{R}{\rho}(\Delta L - \Delta l)\cos(\lambda - L)$$

$$= \delta_0 - \delta_1\cos(\lambda - L) - \delta_2\cos 2(\lambda - L) - \delta_3\cos 3(\lambda - L) + \delta_5\cos_5(\lambda - L) - \ldots$$

$$\Delta\rho/\rho = -\frac{R}{\rho}(\Delta L - \Delta l)\sin(\lambda - L)$$

$$= -\gamma_1\sin(\lambda - L) - \gamma_2\sin 2(\lambda - L) - \gamma_3\sin 3(\lambda - L) - \gamma_5\sin 5(\lambda - L) - \ldots$$

in denen die Koeffizienten die Werte haben

$$\delta_0 = \Delta l - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{1-\beta^2}(\Delta L - \Delta l)$$

$$\delta_1 = \frac{\beta}{1-\beta^2}(\Delta L - \Delta l)\left(a_0 + \frac{1}{2}a_2\right) \qquad \gamma_1 = \frac{\beta}{1-\beta^2}(\Delta L - \Delta l)\left(a_0 - \frac{1}{2}a_2\right)$$

$$\delta_2 = \gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{1-\beta^2}(\Delta L - \Delta l)$$

$$\delta_3 = \frac{\beta}{1-\beta^2}(\Delta L - \Delta l)(a_2 - a_4) \qquad \gamma_3 = \frac{1}{2}\frac{\beta}{1-\beta^2}(\Delta L - \Delta l)(a_2 + a_4)$$

$$\delta_5 = \frac{1}{2}\frac{\beta}{1-\beta^2}(\Delta L - \Delta l)(a_4 - a_6) \qquad \gamma_5 = \frac{1}{2}\frac{\beta}{1-\beta^2}(\Delta L - \Delta l)(a_4 + a_6).$$

Vernachlässigt man in jedem dieser Ausdrücke Glieder von der Größe $\frac{1}{4}\beta^2$, die beispielsweise für die Planeten, für welche das mittlere r den Wert 2·8 hat und daher $\lg\beta = 9{\cdot}54$ ist, etwa 0·03 betragen, so kann man bis auf diesen Grad der Genauigkeit, das ist bis auf etwa 3% die Koeffizienten δ und γ einander gleich annehmen und damit treten die beiden Reihen für $\Delta\lambda$ und $\Delta\rho/\rho$ in den

Zusammenhang, daß die erste ($\Delta\lambda$) eine reine Cosinusreihe, die zweite ($\Delta\rho/\rho$) eine reine Sinusreihe ist, beide aber mit identischen Koeffizienten ($\delta = \gamma$). In der Tat ist aber strenge nur $\delta_2 = \gamma_2$.

Es ist klar, daß man die Zahl dieser Reihenentwicklungen, nachdem einmal die für die Größen $\frac{\rho}{R}$, bez. $\frac{R}{\rho}$ aufgestellt sind, willkürlich steigern kann. Nur die folgenden 4 seien hier noch angeführt, nämlich

$$\rho\Delta\lambda = \frac{R}{\beta}\, a_0\, \Delta l - R\left(\Delta L - \Delta l\,\frac{\beta - a_0}{\beta}\right)\cos(\lambda - L) + R\,\Delta l\,\frac{a_2}{\beta}\cos 2(\lambda - L) - R\,\Delta l\,\frac{a_4}{\beta}\cos 4(\lambda - L) -$$

$$\Delta\rho = -R(\Delta L - \Delta l)\sin(\lambda - L)\,.$$

$$\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 = \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}(2a_0 + a_2)\cos(\lambda - L) + \cos 2(\lambda - L) - \frac{1}{\beta}(a_2 - a_4)\cos 3(\lambda - L) + \frac{1}{\beta}(a_4 - a_6)\cos 5(\lambda - L),$$

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 = \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^2} + \frac{\beta^3}{(1-\beta^2)^2}(2a_0 + a_2)\cos(\lambda - L) + \beta\cos 2(\lambda - L) + (a_2 - a_4)\cos 3(\lambda - L) - (a_4 - a_6)\cos 5(\lambda - L)\ldots$$

Jede von ihnen gibt eine oder mehrere Relationen, aus denen sich die Unbekannten, entweder R oder β, ferner ΔL oder Δl, namentlich aber die Größe L berechnen läßt.

Zur numerischen Durchführung der Entwicklungen teile ich neben den schon angesetzten Daten noch einige mit:

λ	$\Delta\lambda$	$\Delta\rho/\rho$	ρ^2	$\Delta\lambda$	$\Delta\rho/\rho$	ρ^2
	I. 1888 Jänner 7.—27.			II. 1888 Mai 6.—26.		
0^h	+ 456·3	+ 302·8	7·365	+ 455·6	— 226·7	8·418
2	+ 286·0	+ 392·9	5·601	+ 491·4	— 97·8	13·420
4	+ 4·0	+ 369·2	4·911	+ 535·2	+ 43·9	12·598
6	— 170·8	+ 273·6	2·699	+ 474·0	+ 148·3	12·986
8	— 281·5	— 19·4	3·291	+ 394·0	+ 278·2	9·337
10	— 170·7	— 233·3	4·518	+ 210·4	+ 336·9	7·275
12	+ 74·8	— 368·5	5·072	— 12·5	+ 344·8	4·701
14	+ 256·7	— 337·9	7·589	— 197·0	+ 180·7	3·922
16	+ 391·7	— 242·1	10·696	— 254·0	— 49·5	3·469
18	+ 503·1	— 117·1	12·551	— 168·2	— 224·3	4·262
20	+ 518·1	— 7·7	13·629	+ 75·5	— 362·8	5·095
22	+ 475·1	+ 142·1	12·659	+ 291·8	— 338·6	6·781

Die numerischen Reihen sind nunmehr:

I. (1888 Jänner 7.—27.)

$$\Delta\lambda = 195'23 - 387'90\cos(\lambda - 120°\ 14'2) - 76{\cdot}76\cos 2(\lambda - 114\ \ 8{\cdot}8) - 10{\cdot}78\cos 3(\lambda - 99\ \ 12{\cdot}7) - 23{\cdot}87\cos 4(\lambda - 142\ \ 33{\cdot}1) + 7{\cdot}76\cos 5(\lambda - 125\ \ 21{\cdot}0)$$

II. (1888 Mai 6.—26.)

$$\Delta\lambda = 191'55 - 391'49\cos(\lambda - 234°\ 17'1) - 62{\cdot}69\cos 2(\lambda - 232\ \ 30{\cdot}6) - 5{\cdot}93\cos 3(\lambda - 267\ \ 19{\cdot}0) - 5{\cdot}37\cos 4(\lambda - 279\ \ 3{\cdot}1) + 6{\cdot}83\cos 5(\lambda - 212\ \ 31{\cdot}6)$$

$$\begin{aligned}\Delta\rho/\rho = +\ 12'89 &- 370'80 \sin\ (\lambda - 119°\ 15'8)\\ &-\ 64\cdot97 \sin 2\ (\lambda - 114\ \ 4\cdot0)\\ &-\ \ 9\cdot97 \sin 3\ (\lambda - 138\ \ 0\cdot3)\\ &-\ \ 9\cdot98 \sin 4\ (\lambda - 110\ 49\cdot7)\\ &+\ \ 9\cdot18 \sin 5\ (\lambda - 102\ 38\cdot2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\rho/\rho = +\ 2'82 &- 343'64 \sin\ (\lambda - 234°\ \ 9'1)\\ &-\ 52\cdot25 \sin 2\ (\lambda - 256\ 15\cdot4)\\ &-\ \ 5\cdot77 \sin 3\ (\lambda - 195\ \ 0\cdot0)\\ &-\ \ 7\cdot76 \sin 4\ (\lambda - 203\ 52\cdot1)\\ &+\ 11\cdot34 \sin 5\ (\lambda - 212\ 41\cdot2)\end{aligned}$$

zwei Doppelreihen zunächst, die die theoretische Entwicklung, wie sie oben bewiesen wurde, von der Gleichheit der Winkel L und der Identität der Koeffizienten in beiden, mit ziemlicher Genauigkeit bestätigen. Weiters folgt aus den analytischen Ausdrücken für die zwei Koefizienten δ_0 und $\delta_2 = \gamma_2$, nämlich

$$\delta_0 = \Delta l - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{1-\beta^2}(\Delta L - \Delta l \qquad \delta_2 = \gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{1-\beta^2}(\Delta L - \Delta l)$$

die Beziehung

$$\delta_0 + \delta_2 = \Delta l$$

gleich der mittleren Geschwindigkeit der Planeten, zu

$$\Delta l = 195'23 + 76'76 = 271'99 \text{ bez. } = 191'55 + 62'69 = 254'24.$$

aus denen wieder nach dem dritten Kepler'schen Gesetz als mittlere Distanz der Planeten von der Sonne

$$\lg r = 0\cdot4256 \text{ bez. } = 0\cdot4451$$

folgt. Mit dem nun bekannten Δl und dem Wert für $\Delta L = 1182'73$ ergibt sich ferner aus den Koeffizienten δ_2 oder γ_2

$$\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 0\cdot08428 \text{ bez. } 0\cdot06752$$

und aus ihnen wiederum

$$\lg r = 0\cdot4042 \text{ bez. } 0\cdot4989.$$

Weitere Doppelreihen sind:

$$\begin{aligned}\rho\Delta\lambda = 691'52 &- 1195'75 \cos\ (\lambda - 118°\ 16'0)\\ &+\ 14\cdot35 \cos 2\ (\lambda - 107\ \ 1\cdot0)\\ &-\ 13\cdot64 \cos 3\ (\lambda - 121\ 41\cdot1)\\ &+\ 35\cdot16 \cos 4\ (\lambda - \ 96\ \ 1\cdot6)\\ &-\ 16\cdot06 \cos 5\ (\lambda - 132\ 19\cdot2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho\Delta\lambda = 682'84 &- 1210'09 \cos\ (\lambda - 235°\ 47'6)\\ &+\ 25\cdot44 \cos 2\ (\lambda - 245\ \ 0\cdot8)\\ &-\ \ 9\cdot73 \cos 3\ (\lambda - 275\ 11\cdot8)\\ &+\ 19\cdot41 \cos 4\ (\lambda - 221\ 44\cdot0)\\ &-\ 18\cdot41 \cos 5\ (\lambda - 237\ 46\cdot6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\rho = +1'67 &- 938'48 \sin\ (\lambda - 118°\ 42'0)\\ &+\ 13\cdot40 \sin 2\ (\lambda - 105\ 43\cdot0)\\ &-\ \ 7\cdot37 \sin 3\ (\lambda - 102\ 21\cdot9)\\ &+\ 17\cdot91 \sin 4\ (\lambda - 126\ \ 4\cdot1)\\ &-\ 12\cdot52 \sin 5\ (\lambda - 105\ \ 8\cdot2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\rho = +\ 23'76 &- 891'08 \sin\ (\lambda - 233°\ 16'7)\\ &+\ \ 3\cdot02 \sin 2\ (\lambda - 224\ 44\cdot0)\\ &-\ 13\cdot04 \sin 3\ (\lambda - 236\ 37\cdot8)\\ &+\ 18\cdot85 \sin 4\ (\lambda - 240\ 26\cdot5)\\ &-\ 23\cdot16 \sin 5\ (\lambda - 224\ 43\cdot7)\end{aligned}$$

Die Reihe für $\Delta\rho$ sollte nur aus einem Gliede, dem der ersten Ordnung bestehen. In der Tat sind auch die Koeffizienten der anderen gegenüber dem ersten als sehr klein anzusehen und verdanken ihre Entstehung wohl nur den nicht ausgeglichenen statistischen Werten. Seine Bedeutung $R\,(\Delta L - \Delta l)$ führt unter den Annahmen $R = 1$ und $\Delta L = 1182'73$ neuerdings zu

$$\Delta l = 244'25 \quad \text{bez.} \quad 291'65,$$

aus denen nach dem dritten Kepler'schen Gesetze

$$\lg r = 0\cdot4634 \quad \text{bez.} \quad 0\cdot4054$$

folgt. Endlich ist das konstante Glied in der Entwicklung von $\rho\Delta\lambda = \frac{R}{\rho} a_0 \Delta l$ und, wenn man mit

gleichem Grade der Annäherung wie bei den Koeflizienten λ und γ, das heißt, mit Vernachlässigung von $\frac{1}{4}\beta^2$, $a_0 = 1$ annimmt, wird dasselbe einfach $= r\,\Delta l$ und gibt für r die neuen Werte:

$$\lg r = \lg \frac{691{\cdot}52}{244{\cdot}25} = 0{\cdot}4520 \qquad \text{bez.} \quad \lg \frac{682{\cdot}84}{291{\cdot}65} = 0{\cdot}3995.$$

Als letzte Doppelreihe sei noch die für ρ^2 angeschrieben. Sie lautet

$$\begin{aligned}
\rho^2 = 7{\cdot}5709 &- 5{\cdot}0457 \cos\ (\lambda - 109^\circ\ 4{\cdot}8) \\
&+ 1{\cdot}0328 \cos 2\ (\lambda - 111\ \ 6{\cdot}1) \\
&- 0{\cdot}3876 \cos 3\ (\lambda - 124\ 33{\cdot}1) \\
&+ 0{\cdot}6982 \cos 4\ (\lambda - 143\ 24{\cdot}5) \\
&- 0{\cdot}3397 \cos 5\ (\lambda - 116\ 23{\cdot}6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho^2 = 7{\cdot}6887 &- 4{\cdot}8157 \cos\ (\lambda - 241^\circ\ 7{\cdot}1) \\
&+ 0{\cdot}9381 \cos 2\ (\lambda - 245\ 24{\cdot}6) \\
&- 0{\cdot}2878 \cos 3\ (\lambda - 224\ 13{\cdot}9) \\
&+ 0{\cdot}2567 \cos 4\ (\lambda - 208\ \ 3{\cdot}3) \\
&- 0{\cdot}4493 \cos 5\ (\lambda - 205\ 28{\cdot}6)
\end{aligned}$$

Aus den konstanten Gliedern, die der analytischen Entwicklung gemäß $= 1/\beta^2$ sind und aus den Koeffizienten zweiter Ordnung, die $= R$ sein sollen, erhält man

$$\begin{aligned}
\lg r &= 0{\cdot}4396 \quad \text{bez.} \quad 0{\cdot}4429 \\
\lg R &= 0{\cdot}0140 \qquad\quad 9{\cdot}9722.
\end{aligned}$$

9. Abzählungen der Planeten.

Die Angaben über die Zahl der Planeten in jeder einzelnen Doppelstunde der Länge oder Rektaszension finden sich schon oben p. 2 und 3 [312 und 313] vor. Ein theoretischer Ansatz zu ihrer Berechnung läßt sich auf Grund der folgenden Annahmen durchführen: 1. Die heliozentrische Verteilung der Planeten sei eine gleichförmige, das heißt, wird ihre Zahl auf dem Bogendifferential dl mit N bezeichnet, so sei

$$N = C dl.$$

2. Ihre geozentrische Verteilung sei damit durch

$$N' = C d\lambda : \frac{d\lambda}{dl}$$

definiert, werde also proportional zu $\frac{dl}{d\lambda}$ angesetzt, so daß man die Beziehung hat:

$$N' = N \frac{dl}{d\lambda}.$$

Der hier auftretende Umwandlungsfaktor $\frac{dl}{d\lambda}$ berechnet sich aus den Grundgleichungen

$$\begin{aligned}
\rho \cos\lambda &= r \cos l - R \cos L \\
\rho \sin\lambda &= r \sin l - R \sin L
\end{aligned}$$

durch deren Differentiation zu

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\rho}\cos(\lambda - L)}$$

welcher Ausdruck nach Substitution von

$$\frac{R}{\rho} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\cos(\lambda - L) + \frac{\beta}{1-\beta^2}\sqrt{1-\beta^2\sin^2(\lambda - L)}$$

und einer einfachen Transformation die Form

$$\frac{dl}{d\lambda} = 1 - \beta\,\frac{\cos(\lambda - L)}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2(\lambda - L)}}$$

annimmt und mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\frac{\beta \cos(\lambda - L)}{\sqrt{1-\beta^2 \sin(\lambda - L)}} = \frac{\partial}{\partial \lambda}[\arcsin(\beta \sin(\lambda - L))]$$

leicht in eine Fourier'sche Reihe entwickelt werden kann. Man erhält so

$$N' = N(1 - \varkappa_1 \cos(\lambda - L) + \varkappa_3 \cos 3(\lambda - L) - \varkappa_5 \cos 5(\lambda - L) + \ldots$$

wo die einzelnen Koeffizienten $\varkappa$ die Werte haben:

$$\varkappa_1 = \beta\left[1 + \frac{\beta^2}{8} + \frac{3\beta^4}{64} + \frac{25\beta^6}{1024} + \frac{245}{16384}\beta^8 + \ldots\right.$$

$$\varkappa_3 = \frac{\beta^3}{8}\left[1 + \frac{9\beta^2}{16} + \frac{45\beta^4}{128} + \frac{245}{1024}\beta^6 + \ldots\right.$$

$$\varkappa^5 = \frac{3\beta^5}{128}\left[1 + \frac{25\beta^2}{24} + \frac{380\beta^4}{192} + \ldots\right.$$

$$\varkappa_7 = \frac{5\beta^7}{1024}\left[1 + \frac{49\beta^2}{32} + \ldots\right.$$

Zur numerischen Auswertung verwendete ich jedoch nicht die direkten, p. 2 und 3 [312 und 313] mitgeteilten Zahlen, sondern glättete sie nach den bekannten statistischen Methoden, indem ich an Stelle einer bestimmten Zahl die Summe aus ihr und ihren beiden unmittelbaren Nachbarwerten setzte und diese Glättungsoperation zweimal nacheinander ausführte. Außerdem entnahm ich, um eine größere Anzahl von Rechnungsbeispielen zu einer exakteren Diskussion ihrer Ergebnisse zur Verfügung zu haben, der Planetenephemeride des Berliner Jahrbuchs für 1890 die Planetenzahlen in jeder Rektaszensionsdoppelstunde für das Intervall 1888, September 4. bis 24. und endlich verwendete ich noch die analogen Zahlen, die Dr. Lense in seiner Mitteilung »Die jovizentrische Bewegung der kleinen Planeten« in den Astronomischen Nachrichten, Band 196, Nr. 4700, 1913, gibt und die für das Intervall 1902, Jänner 4. bis 24. gültig sind und sich auf 307 Planeten beziehen.

Die einzelnen, den weiteren Rechnungen zugrunde liegenden Zahlen sind in der folgenden Zusammenstellung enthalten:

λ	I. 1888 Jänner 7.—27.		II. 1888 Mai 6.—26.		III. 1888 September 4.—24.		IV. 1902 Jänner 4.—24.	
	N' (rauh)	$9N'$ (geglättet)	N' (rauh)	$9N'$ (geglättet)	N' (rauh)	$9N'$ (geglättet)	N' (rauh)	$9N'$ (geglättet)
0	31	209	25	207	14	132	31	255
2	17	169	17	215	13	124	19	221
4	14	136	32	221	14	141	26	192
6	9	113	23	217	11	167	16	170
8	11	135	20	226	37	223	13	172
10	19	187	27	235	19	265	25	191
12	32	239	34	238	38	315	25	223
14	35	260	23	205	47	308	24	248
16	24	252	16	158	32	258	37	268
18	24	234	9	133	8	181	27	273
20	30	231	12	149	14	140	30	280
22	19	220	27	181	18	131	34	270
Summe	265	2385	265	2385	265	2385	307	2763

Sie lieferten die nachstehenden Fourier'schen Reihen:

$$\text{I: } N' = \frac{265}{12}\Big[1 - 0{\cdot}3188\cos(\lambda - 76^\circ\ 7') - 0{\cdot}1232\cos 2(\lambda - 96\ 53) - 0{\cdot}0101\cos 3(\lambda - 128\ 51) - 0{\cdot}0020\cos 4(\lambda - 109\ 44) - 0{\cdot}0085\cos 5(\lambda - 106\ 56)\Big]$$

$$\text{II: } N' = \frac{265}{12}\Big[1 - 0{\cdot}2058\cos(\lambda - 288^\circ\ 2') - 0{\cdot}1137\cos 2(\lambda - 270^\circ\ 55) - 0{\cdot}0215\cos 3(\lambda - 256\ 54) - 0{\cdot}0030\cos 4(\lambda - 249\ 20) - 0{\cdot}0018\cos 5(\lambda - 236\ 11)\Big]$$

$$\text{III: } N' = \frac{265}{12}\Big[1 - 0{\cdot}4721\cos(\lambda - 7^\circ\ 33') - 0{\cdot}1195\cos 2(\lambda - 11\ 4) - 0{\cdot}0411\cos 3(\lambda - 36\ 45) - 0{\cdot}0073\cos 4(\lambda - 22\ 30) - 0{\cdot}0134\cos 5(\lambda - 20\ 18)\Big]$$

$$\text{IV: } N' = \frac{307}{12}\Big[1 - 0{\cdot}2380\cos(\lambda - 106^\circ\ 20') - 0{\cdot}0340\cos 2(\lambda - 99\ 13) - 0{\cdot}0026\cos 3(\lambda - 150\ 0) - 0{\cdot}0007\cos 4(\lambda - 74\ 46) - 0{\cdot}0033\cos 5(\lambda - 120\ 47)\Big]$$

Man kann nicht sagen, daß die Winkel L in diesen Reihen sowohl untereinander als auch mit denen in den vorher entwickelten (für die Reihe III sollte $L = 350$, und für IV $L = 113^\circ$ sein) in genügender Übereinstimmung stehen. Auch sollen sie bloß Glieder ungerader Ordnung enthalten, während gerade die Glieder zweiter Ordnung gegenüber denen der dritten recht groß sind. Dies erweckt den Verdacht, als ob das Prinzip, auf dem sie aufgebaut sind, das nämlich, daß die heliozentrische Verteilung der Planeten eine gleichmäßige sei, nicht zutrifft und man hat nunmehr die Aufgabe zu lösen, das Gesetz dieser Verteilung aus den vorliegenden Daten abzuleiten. Der Versuch einer solchen Lösung sei noch im folgenden gegeben.

Aus den Zahlen N', die die geozentrische Verteilung der Planeten darstellen, lassen sich auf Grund der Beziehung

$$N' = N\left[1 - \frac{\beta\cos(\lambda - L)}{\sqrt{1 - \beta^2\sin^2(\lambda - L)}}\right]$$

die Zahlen N, die der Ausdruck deren heliozentrischen Verteilung sind, berechnen, sobald man in dem Reduktionsfaktor

$$F = 1 - \frac{\beta\cos(\lambda - L)}{\sqrt{1 - \beta^2\sin^2(\lambda - L)}}.$$

die Größe L als bekannt ansieht und für $\beta = R:r$ einen Näherungswert ansetzt. Mit den angenommenen Werten $\lg\beta = 9{\cdot}5500$; das heißt $\lg r = 0{\cdot}4500$, ferner für die vier Daten

$$\text{I: } L = 117^\circ \quad \text{II: } L = 234^\circ \quad \text{III: } L = 350^\circ \quad \text{IV: } L = 113^\circ$$

berechnete ich aus den geglätteten Zahlen N', die sich auf die geozentrische Verteilung der Planeten beziehen, deren entsprechenden die heliozentrische darstellenden N — und glättete sie nochmals durch Mitteln je dreier aufeinanderfolgenden Nachbarwerte. Die aus dieser Rechnung sich ergebenden Zahlen sind in der auf folgender Seite befindlichen Tabelle ersichtlich.

Sie lassen ein, natürlich durch das wiederholte Glätten hervorgerufenes, fast zu regelmäßiges Ansteigen gegen ein Maximum im Betrage von 28, das bei den Längen $\lambda = 12^h - 14^h$ auftritt und ein Abfallen gegen ein Minimum von 18 bei $\lambda = 0^h$ erkennen, während der einer gleichförmigen Verteilung entsprechende Mittelwert $265:12 = 22{\cdot}1$, beziehungsweise $307:12 = 25{\cdot}6$ wäre. Behandelt man sie, um die Lage der Verdichtungsstelle genauer zu fixieren, nach der Methode der harmonischen Analyse, so

λ	I.		II.		III.		IV.	
	geozentrisch	heliozentrisch	geozentrisch	heliozentrisch	geozentrisch	heliozentrisch	geozentrisch	heliozentrisch
0h	23·2	18·9	23·1	18·0	14·7	19·9	28·3	24·2
2	18·8	18·8	23·9	17·7	13·8	19·4	24·6	25·3
4	15·1	19·0	24·5	17·9	15·7	18·9	21·3	26·5
6	12·5	20·5	24·1	19·2	18·5	19·2	18·9	27·5
8	15·0	23·4	25·1	22·2	24·8	21·1	19·1	28·3
10	20·8	26·8	26·1	26·1	29·4	23·9	21·2	28·3
12	26·6	28·2	26·4	28·9	35·0	26·5	24·8	27·4
14	28·9	26·7	22·8	28·8	34·2	27·1	27·6	25·9
16	28·0	23·7	17·5	25·9	28·7	25·4	29·8	24·3
18	26·0	20·8	14·8	22·2	20·1	22·7	30·3	23·1
20	25·7	19·3	16·6	19·6	15·6	20·8	31·1	22·9
22	24·4	18·9	20·1	18·5	14·5	20·1	30·0	23·3
Summe	265		265		265		307	

ergeben sich die folgenden rasch konvergierenden Reihen, die nur aus zwei Gliedern bestehen (die Koeffizienten der anderen liegen unter 0·005 und ich führe sie nicht weiter an)

$$\text{I: } N = \frac{265}{12}\,[1 + 0{\cdot}2065 \cos (\lambda - 181^\circ\ 53') + 0{\cdot}0657 \cos 2\,(\lambda - 179\ \ 15')]$$

$$\text{II: } N = \frac{265}{12}\,[1 + 0{\cdot}2547 \cos (\lambda - 196^\circ\ 16') + 0{\cdot}0675 \cos 2\,(\lambda - 191\ \ 21')]$$

$$\text{III: } N = \frac{265}{12}\,[1 + 0{\cdot}1332 \cos (\lambda - 208^\circ\ 26') + 0{\cdot}0689 \cos 2\,(\lambda - 191\ \ 57')]$$

$$\text{IV: } N = \frac{307}{12}\,[1 + 0{\cdot}1281 \cos (\lambda - 126^\circ\ 28') + 0{\cdot}0217 \cos 2\,(\lambda - 168\ \ 21')]$$

Die drei ersten geben für die Lage des Verdichtungsknotens die Mittelwerte:

$$L_1 = 180^\circ\ 34' \qquad L_2 = 193^\circ\ 49' \qquad L_3 = 200^\circ\ 12'$$

und deuten damit an, daß sie im Raume nicht konstant, sondern sich in der Zeit von 1888 Jänner 17. bis September 14. um etwa 20° weiter bewegte. Bemerkt man, daß die Bewegung des Jupiter in dem gleichen Zeitintervalle von 240 Tagen ebenfalls 20° zählt, so wäre man versucht anzunehmen, daß die Verdichtungsstelle mit dem Jupiter fortschreite. Doch dieser Annahme widerspricht der Winkelwert in der für 1902 Jänner 14. gültigen Reihe IV, für den $L_4 = 147^\circ$ das Mittel ist, während er, da die Bewegung des Jupiter in dieser Zwischenzeit von 1888 Jänner 17 bis 1902 Jänner 4 404° ist, $L_4 = 224^\circ$ sein sollte. Die Frage, wie die Bewegung des Verdichtungsknotens in der heliozentrischen Verteilung der kleinen Planeten mit der des Jupiter zusammenhängt, braucht einer eingehenderen Untersuchung, deren Durchführung jedoch zunächst hier nicht beabsichtigt ist. Ist ja doch die Tatsache, daß die Verteilung der Bahnelemente der kleinen Planeten in irgend einer Weise zum Jupiter in Beziehung steht, seit lange allgemein bekannt. In neuester Zeit beschäftigte man sich vielfach mit dem Aufsuchen der da auftretenden Gesetzmäßigkeiten. Aber die betreffenden Abhandlungen von S. Barton im Astr. Journ. 30, p. 41, und Plummer in Monthl. Not. 76, p. 378, sind mir nur aus der kurzen Inhaltsangabe in Kobold's Literarischer Beilage zu den Astr. Nachr., Nr. 39, bekannt.

10. Bestimmung der Begrenzungskurve aus den Planetenzahlen.

Aus der Gleichung

$$N' = N\left(1 - \frac{\beta \cos(\lambda - L)}{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2(\lambda - L)}}\right),$$

in der N' die geozentrische Verteilung der Planeten bedeutet und N deren heliozentrische, jedoch schon wegen ihrer ungleichförmigen Dichte korrigierte ist, läßt sich die Größe β sowie der Winkel L, das ist die Lage des Erdortes, oder was damit identisch ist, die Gleichung der Begrenzungskurve ableiten. Man setze zu diesem Zwecke

$$\frac{\beta \cos(\lambda - L)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \xi \quad \text{d. h.} \quad \frac{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2(\lambda - L)}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{1+\xi^2}$$

als Unbekannte an und erhält damit 12 Gleichungen von der Form

$$N' = N\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right),$$

aus denen, wenn man die zu einem bestimmten λ-Werte zugehörigen N'-Werte mit N_1'; die zu $180 + \lambda$ gehörigen dagegen mit N_2' bezeichnet,

$$N_1' = N\left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right) \qquad N_2' = N\left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)$$

folgt. Die Division beider gibt die sechsfach zu zählende Gleichung

$$\frac{N_1'}{N_2'} = m = \frac{\sqrt{1+\xi^2} - \xi}{\sqrt{1+\xi^2} + \xi}$$

aus der sich ergibt

$$\xi = \frac{1-m}{2\sqrt{m}}.$$

Führt man nunmehr als neue Unbekannte ein

$$D = \frac{\beta \cos L}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad E = \frac{\beta \sin L}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

so erhält man das neue Gleichungssystem

$$\xi = \frac{1-m}{2\sqrt{m}} = D \cos\lambda + E \sin\lambda,$$

das man nach der Methode der kleinsten Quadrate oder nach einem anderen Näherungsverfahren aufzulösen hat.

Bei Anwendung der folgenden, wegen der ungleichförmigen heliozentrischen Verteilung schon korrigierten N'-Werte

I 1888 Jänner 7.—27: N' =	26·9	21·8	17·1	13·0	13·6	17·3		
	21·8	24·6	26·0	26·6	28·4	27·9	Summe	= 265
II 1888 Mai 6—26: N' =	27·2	28·4	28·6	26·2	24·2	22·1		
	20·8	17·7	14·4	14·2	18·0	23·2	»	= 265

erhielt ich

$$\text{I: } D = +0{\cdot}1250 \qquad E = -0{\cdot}3356$$

$$\text{II: } D = +0{\cdot}1547 \qquad E = +0{\cdot}2665$$

und aus ihnen

$$\text{I } L = 110^\circ\ 26' \qquad \lg \beta/\sqrt{1-\beta^2} = 9{\cdot}5540 \quad \lg r = 0{\cdot}4722$$

$$\text{II } L = 239\ \ 52 \qquad \lg \beta\sqrt{1-\beta^2} = 9{\cdot}4888 \quad \lg r = 0{\cdot}5309.$$

11. Graphische Methoden der Bestimmung der Begrenzungskurven.

Diese ganz elementare Methode der Bestimmung des Erdortes in dem Kreise, in dem der Schwarm der Planeten sich um die Sonne bewegt, ist zu einfach, als daß sie nicht auch eine rein graphische Lösung der vorliegenden Aufgabe gestatten würde, die sodann auch auf die Bewegungsgrößen $\Delta\lambda$ und $\Delta\rho$ ausgedehnt werden könnte.

Man ziehe, wenn man es vorerst mit den Planetenzahlen zu tun hat, einen Kreis, teile ihn in 12 Teile und bezeichne die einzelnen Teilungspunkte mit $0^h = 0$ Planeten, $2^h = 22$ Planeten, $4^h = 44$ und so fort entsprechend der Annahme, daß deren heliozentrische Verteilung eine gleichförmige ist, somit von ihnen auf jede Doppelstunde in Länge $265 : 12 = 22$ entfallen. In geozentrischer Richtung für die die entsprechenden Planetenzahlen schon oben angeführt sind, dagegen hat man, wenn die geozentrischen Längenstunden mit römischen Zahlzeichen angedeutet werden $0^h \equiv 0^h$, $II^h \equiv 26{\cdot}9$ $IV^h \equiv 26{\cdot}9 + 21{\cdot}8 = 48{\cdot}7$ und so fort anzusetzen und erhält so die folgende leicht verständliche Konstruktionstafel.

1888 Jänner 7.—27.

heliozentrisch		geozentrisch			heliozentrisch		geozentrisch		
0^h	0	0^h	0	0	14^h	154	XIV^h	24·6	131·5
2	22	II	26·9	26·9	16	176	XVI	26·0	156·1
4	44	IV	21·8	48·7	18	198	XVIII	26·6	182·1
6	66	VI	17·1	65·8	20	220	XX	28·4	208·7
8	88	VIII	13·0	78·8	22	242	XXII	27·9	237·1
10	110	X	13·6	92·4	0	265	0	—	265·0
12	132	XII	21·8	109·7					

Sowie nun die Verbindungslinien der heliozentrischen Teilungspunkte $0^h - 6^h$, $2^h - 8^h$, $4^h - 10^h$ und so fort sich in einem Punkte, dem Sonnenorte S schneiden, so werden auch die geozentrischen 0—VI, II—VIII, IV—X usw. miteinander verbunden, wenn auch nur genähert, in einem Punkte zusammenkommen und dies ist der gesuchte Erdort.

Danach ist Fig. 1, p. 28 [338], angelegt.

Fig. 1.

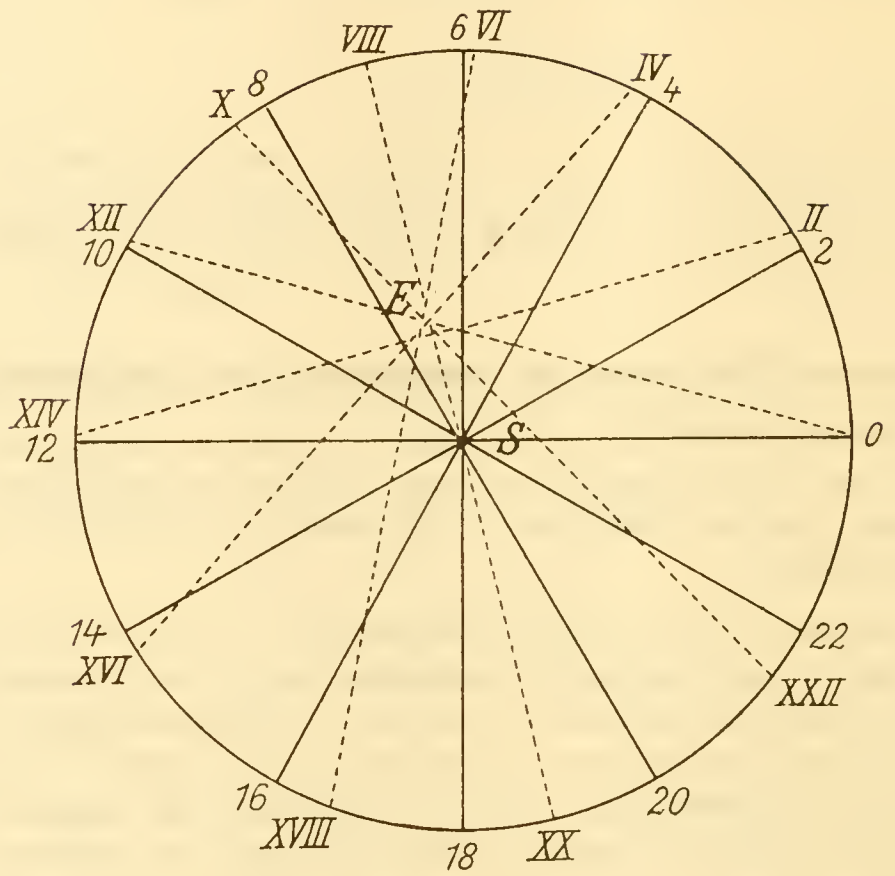
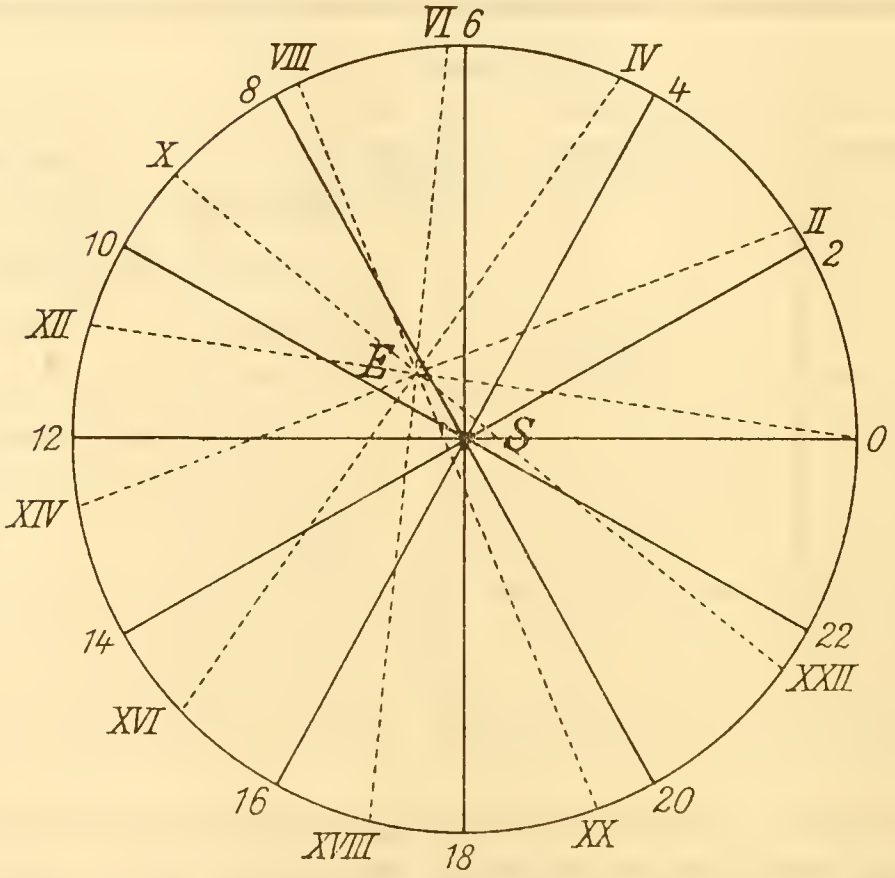


Fig. 2.



Analog läßt sich auch die Zeichnung bezüglich der Bewegungsgrößen $\Delta\lambda$ ausführen. Die Angaben über sie sind auf p. 20 [330] enthalten. Doch sind sie vorerst von ihrem konstanten Teil zu befreien, damit

ihre Summe sich auf Null reduziere. Die Einzelwerte, in Graden ausgedrückt, für das erste Datum 1888 Jänner 7.—27 sind:

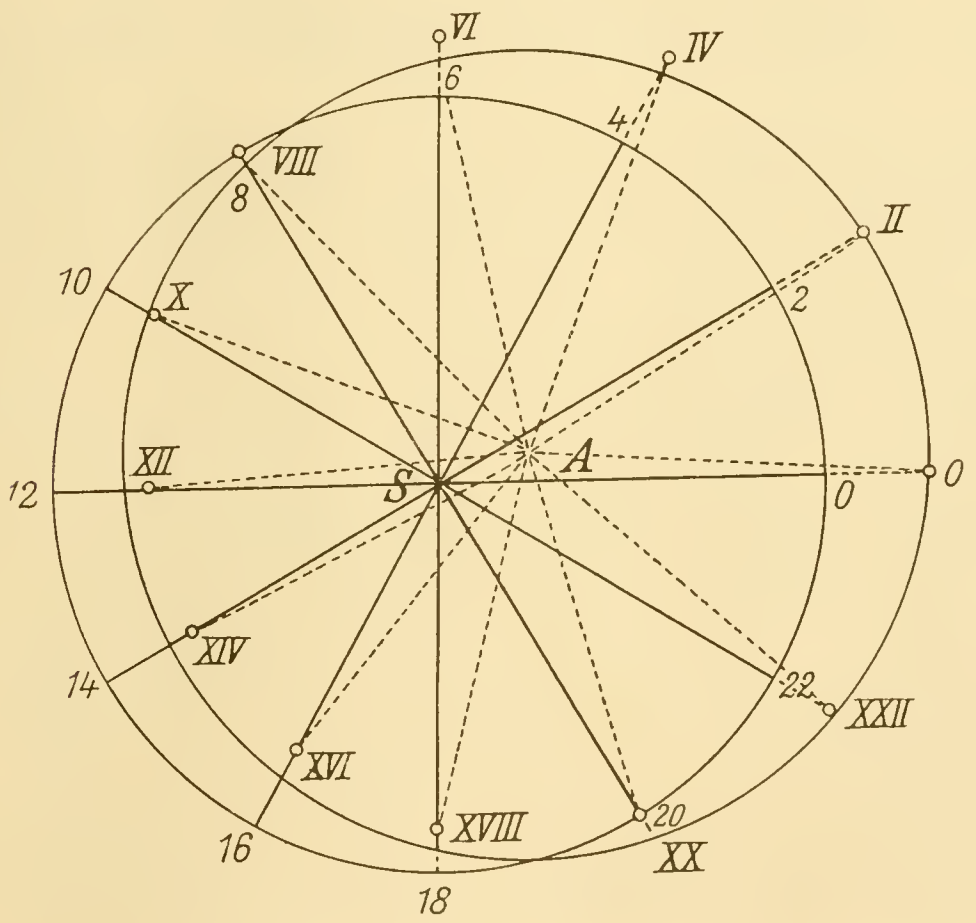
$$+4°4 \quad +1°5 \quad -3°2 \quad -6°1 \quad -7°9 \quad -6°1$$
$$-2·0 \quad +1·0 \quad +3·3 \quad +5·1 \quad +5·3 \quad +4·7.$$

Sie sagen aus, daß, während die heliozentrische Bewegung stets 30° beträgt, die geozentrische dagegen um diese Beträge bald größer bald kleiner ist. Man erhält so die folgende Konstruktionstafel nach der Fig. 2 angelegt ist.

1888 Jänner 7.—27.

heliozentrisch		geozentrisch			heliozentrisch		geozentrisch		
0^h	0°	0^h	0°	0°	14^h	210°	XIV^h	— 2°0	190°6
2	30	II	+ 4·4	34·4	16	240	XVI	+ 1·0	221·6
4	60	IV	+ 1·5	65·9	18	270	XVIII	+ 3·3	254·9
6	90	VI	— 3·2	92·7	20	300	XX	+ 5·1	290·0
8	120	VIII	— 6·1	116·6	22	330	XXII	+ 5·3	325·3
10	150	X	— 7·9	138·7	0	360	0	+ 4·7	360·0
12	180	XII	— 6·1	162·6					

Fig. 3.



Der Vergleich der beiden Figuren 1 und 2 zeigt eine der graphischen Darstellung vollgenügende Übereinstimmung in der Richtung, in der der Erdort E gegenüber S liegt, wie auch in der Größe der Exzentrizität.

Die zweite Bewegungsgröße $\Delta\rho$, deren Einzelwerte, in Bogenminuten angesetzt, sich auf p. 15 [325] vorfinden und die ich zur Konstruktion, ausgedrückt in Teilen des Radius, hier nochmals folgen lasse:

$$+0\cdot2391 \quad +0\cdot2703 \quad +0\cdot2380 \quad +0\cdot1373 \quad -0\cdot0102 \quad -0\cdot1442$$

$$-0\cdot2412 \quad -0\cdot2708 \quad -0\cdot2303 \quad -0\cdot1207 \quad -0\cdot0083 \quad +0\cdot1470$$

führen direkte zur Zeichnung eines zweiten, gegen den die heliozentrische Bewegung darstellenden exzentrisch gelegenen Kreises, dessen Mittelpunkt hier jedoch nicht nach dem Erdort, sondern nach dem Apex der Erdbewegung hinweist, so daß die Richtung SA in der Fig. 3 auf den analogen in 1 und 2 senkrecht steht.